ESAMI DI MATEMATICA DISCRETA II 2006/2007

14/06/2007

(1) Sia $U_k \subseteq \mathbb{R}^5$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori
$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,1,0,-1,0),\ \mathbf{v}_3 = (1,-k+1,0,-k-1,0).$$

(a) Si discuta l'indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ed estrarre dall'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di U_k al variare del parametro k;

(b) determinare se possibile un sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ (dandone equazioni cartesiane o parametriche), indipendente da k, tale che $U_k \oplus W = \mathbb{R}^5$ per ogni $k \neq 0$;

(c) determinare se possibile un sottospazio proprio V di $\mathbb{R}^5$ contenente U_k per ogni valore del parametro k.

Soluzione.

(a) Formiano la matrice A avene per righe le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rispettivamente. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango di A è massimo cioè pari a 3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -k+1 & 0 & -k-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -k & -2k & -k \end{pmatrix},$$
dove ho dapprima sottratto alla seconda e alla terza riga la prima e poi ho sommato alla terza riga la seconda moltiplicata per $k-1$. Ne concludiamo che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 0$. Se $k \neq 0$ abbiamo che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano necessariamente una base di U_k. Se $k = 0$ una base di U_k è data da 2 suoi vettori indipendenti, ad esempio, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ (si noti che per $k = 0$ si ha $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$).

(b) Abbiamo visto nel punto (a) che, per $k \neq 0$, riducendo a scala la matrice A otteniamo i 3 pivot proprio sulle prime 3 colonne. Ne segue che possiamo scegliere $W = Span\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$. Le sue equazioni cartesiane sono
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$
mentre le sue equazioni parametriche sono $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,t,s)$.

(c) Dalla riduzione a scala del punto (a), se $k \neq 0$ possiamo dividere l'ultima riga per k e concludiamo che il sottospazio U_k è generato dai vettori
$$(1,0,1,0,1), (0,1,-1,-1,-1), (0,0,-1,-2,-1)$$
ed è pertanto indipendente da k. Siccome U_1 è generato dai primi due dei precedenti vettori concludiamo che possiamo scegliere
$$V = Span\{(1,0,1,0,1), (0,1,-1,-1,-1), (0,0,-1,-2,-1)\}$$

(2) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ di equazioni
$$f(x,y,z) = (22x + 48y + 24z, -12x - 26y - 12z, 3x + 6y + z).$$
e l'insieme ordinato $\mathcal{B} = \Big((8,-4,1),(7,-4,1),(-2,1,0)\Big)$.

(a) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;

(b) determinare le matrici $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ indica la base canonica di $\mathbb{R}^3$;
(c) determinare autovalori ed autospazi di f;
(d) determinare tutte le matrici diagonali simili alla matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.

Soluzione.
(a) Per dimostrare che i vettori di $\mathcal{B}$ formano una base basta verificare che la matrice avente oer righe i vettori di $\mathcal{B}$ ha rango massimo. Questo si può verificare con l'algoritmo di Gauss leggendo le prime 3 colonne del calcolo del punto (b).
(b) Abbiamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id))^{-1}$.
Calcoliamo quindi tale inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Concludiamo che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Utilizzando la proprietà della composizione delle trasformazioni lineari abbiamo

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) &= M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 48 & 24 \\ -12 & -26 & -12 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Dal punto (b) osserviamo che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale. Abbiamo quindi per definizione che f è diagonalizzabile. Ne deduciamo inoltre che gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 1 (sia algebrica che geometrica) e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità 2 (sia algebrica che geometrica). Gli autospazi sono generati dai vettori della base $\mathcal{B}$ corrispondenti agli autovalori. In particolare

$$\begin{aligned} V_1 &= Span\{(8, -4, 1)\} \\ V_{-2} &= Span\{(7, -4, 1), (-2, 1, 0)\} \end{aligned}$$

(d) Le matrici diagonali simili ad f sono le 3 matrici che si ottengono dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ permutando gli elementi sulla diagonale.

10/07/2007

(1) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio W_k dipendente dal parametro reale k generato dai vettori

$$\mathbf{w}_1 = (1, 1, 0, 3),\ \mathbf{w}_2 = (2k, 0, -1, -4k),\ \mathbf{w}_3 = (1, 1, 2, -k),$$

ed il sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + t = 0 \end{cases},$$

dove (x, y, z, t) sono le coordinate di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla base canonica.

(a) Si discuta la dimensione del sottospazio W_k al variare del parametro k.
(b) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $W_k \cap U$ al variare del parametro k.
(c) Determinare se esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim W = 3$ e $\dim(W \cap U) = 0$.
(d) Determinare se esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim W = 2$ e $\dim(W \cap U) = 0$

Soluzione.

(a) Basterà calcolare il rango della matrice le cui righe (o colonne) sono formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Utilizzando il metodo di Gauss otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2k & 0 & -1 & -4k \\ 1 & 1 & 2 & -k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2k & -1 & -10k \\ 0 & 0 & 2 & -k-3 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq 0$ deduciamo che la matrice ha rango 3. Per $k = 0$, sostituendo ed applicando ancora il metodo di Gauss otteniamo sempre che il rango della matrice è 3. Concludiamo che $\dim W_k = 3$ per ogni valore di k.

(b) Calcoliamo $\dim(U \cap W_k)$ utilizzando l'identità di Grassmann. Lo spazio U ha dimensione 2 in quanto è dato da due equazioni che sono chiaramente indipendenti in $\mathbb{R}^4$. Una sua base è pertanto data da 2 suoi vettori indipendenti. Possiamo ad esempio scegliere $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 3)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 2, 1, 10)$. La dimensione di $U + W_k$ è data dal rango della matrice che ha per righe le coordinate dei vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Riducendo a scala tale matrice otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -k-3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(k-1)(k+3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Concludiamo che $\dim(U + W_k) = 4$ per $k \neq 1, -3$. In questi casi abbiamo $\dim(U \cap W_k) = 1$ ed una sua base è data dal vettore $\mathbf{w}_1$.
Per $k = 1, -3$ abbiamo $\dim(U \cap W_k) = 2$. Sapendo che anche $\dim U = 2$ deduciamo che in questi casi $U \cap W_k = U$ e pertanto una base è data da $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

(c) Non esiste per l'identità di Grassmann. Infatti se $\dim(U \cap W) = 0$ avremmo $\dim U + W = 5$ che è impossibile in quanto $\mathbb{R}^4$ non ha sottospazi di dimensione 5

(d) Basterà prendere un sottospazio W coplementare ad U. Considerando la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ abbiamo che un complemento di U è dato dal sottospazio $W = \mathrm{Span}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

(2) Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ una base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Si considerino gli endomorfismi f e g di $\mathbb{R}^3$ definiti nel modo seguente

$$f(\mathbf{b}_1) = (0, 1, 0),\ f(\mathbf{b}_2) = (-2, 1, -1),\ f(\mathbf{b}_3) = (2, -1, 0)$$

$$g(x, y, z) = (x - y)\mathbf{b}_1 + z\mathbf{b}_2 + (x + z)\mathbf{b}_3$$

(a) Determinare le matrici $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ indica la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare autovalori ed autospazi di $f \circ g$, osservando che non dipendono dalla base $\mathcal{B}$.
(c) Determinare autovalori ed autospazi di $g \circ f$, osservando che dipendono dalla base $\mathcal{B}$.

Soluzione.

(a) Abbiamo $g(1,0,0) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$. Ne segue che la prima colonna di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$ avrà i coefficienti 1,0,1 e così via per le altre colonne. Abbiamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$ viene ottenuta ancora utilizzando la sua definizione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Per calcolare autovalori ed autospazi di un endomorfismo dobbiamo conoscere la matrice associata rispetto ad una qualunque base. Per quanto riguarda $f \circ g$ possiamo facilmente calcolarne la matrice associata rispetto alla base canonica. Infatti

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f \circ g) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Essendo tale matrice diagonale gli autovalori sono i coefficienti che appaiono sulla diagonale e sono pertanto 2 e -1. Per quanto riguarda gli autospazi abbiamo $V_2 = \mathrm{Span}\{(1,0,0)\}$ e $V_{-1} = \mathrm{Span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(c) Nel caso di $g \circ f$ possiamo facilmente calcolare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$. Infatti

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) &= M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calcoliamo gli autovalori di questa matrice. Otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Gli autovalori sono anche in questo caso 2 con molteplicità algebrica 1 e -1 con molteplicità algebrica 2. Andiamo a calcolare i rispettivi autospazi. L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove x, y, z sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Otteniamo l'unica equazione indipendente $y = z$ e pertanto concludiamo che

$$V_{-1} = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3\}.$$

In modo del tutto analogo possiamo calcolare V_2: sarà dato dalle soluzioni del sistema

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

e quindi concludiamo che

$$V_2 = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3\}.$$

17/09/2007

(1) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio

$$W_h = \mathrm{Span}\{(0, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 0), (h, 0, 2h, 1)\}$$

dipendente dal parametro reale h ed il sottospazio

$$U_k = \mathrm{Span}\{(1, 1, 1, -1), (0, -2, 1, 1), (1, -1, 2, k)\}$$

dipendente dal parametro reale k.

(a) Determinare i valori di h e k che rendono massima la dimensione del sottospazio $W_h \cap U_k$.
(b) Detti h_0 e k_0 tali valori, si verifichi che si ha $W_{h_0} = U_{k_0}$. Determinare le equazioni cartesiane di W_{h_0}.
(c) Determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ che non contenga vettori della base canonica e tale che $V \oplus W_{h_0} = \mathbb{R}^4$.

(2) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ e $\mathbf{v} = (2, 5, -1)$.

(a) Si determini una base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ di U.
(b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}_1) &= 2\mathbf{b}_1, \\ f(\mathbf{b}_2) &= \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \\ f(\mathbf{v}) &= -\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Si determini la matrice M associata ad f rispetto alla base $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{v})$ di $\mathbb{R}^3$.
(c) Calcolare gli autovalori di f. La matrice M è diagonalizzabile?
(d) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di f.

14/01/2008

(1) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro reale k:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3),\ \mathbf{v}_2 = (0, k, -1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, 2).$$

(a) Si determini l'unico valore di k per cui i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$.
(b) Posto k pari a tale valore si verifichi che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti trovando un vettore $\mathbf{v}$ che si esprima in due modi distinti come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
(c) Posto $k = 0$ si determinino le matrici del cambiamento di base dalla base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ alla base canonica e viceversa.

Soluzione.
(a) Determiniamo il rango della matrice le cui righe sono formate dai coefficienti dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Procediamo riducendo a scala per righe tale matrice ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$ per ogni valore di k diverso da -1.
(b) Si puè scegliere ad esempio $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. Abbiamo infatti

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

(c) Posto $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ abbiamo chiaramente

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infine $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id))^{-1}$. Calcoliamo quindi tale inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ne deduciamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Si considerino l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazioni

$$f(x, y, z) = (x, 4x - 2y - 2z, 2x - 2y)$$

e l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$g(1, 0, 0) = (1, 1, 1),\ g(0, 1, 1) = (1, 0, 1),\ g(0, 1, 0) = (1, 1, 0).$$

(a) Posto $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ si determinino le matrici $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(g)$, dove $\mathcal{E}$ rappresenta la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g)$ associata all'applicazione $f \circ g$ rispetto alla base canonica.
(c) Stabilire se l'applicazione $f \circ g$ è diagonalizzabile.
(d) Determinare gli autospazi dell'applicazione $f \circ g$.

Soluzione.
(a) Determiniamo $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$. Sarà sufficiente sostituire le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ nelle equazioni di f. Otteniamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per comodità di notazione poniamo $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$ cosicché $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Per calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$ dobbiamo determinare le immagini tramite g dei vettori della base canonica ed esprimerli come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$. Si ha

$$g(1,0,0) = \mathbf{v}_1,\ g(0,1,0) = \mathbf{v}_3,$$

$$g(0,0,1) = g((0,1,1) - (0,1,0)) = g(0,1,1) - g(0,1,0) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

Ne deduciamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In alternatica si può considerare la base ausiliaria $\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,1),(0,1,0))$ su cui è definita g. Si osserva che, per definizione $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g) = I$ e si conclude che

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g) M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(id) \\ &= (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(id))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Basterà svolgere il prodotto delle due matrici calcolate al punto precedente.

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f \circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Calcoliamo gli autovalori della matrice $A := M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f \circ g)$. Essendo tale matrice triangolare i suoi autovalori sono i coefficienti che appaiono sulla diagonale. Abbiamo quindi $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2. Per dimostrare la diagonalizzabilità è sufficiente calcolare il rango della matrice $A - 2I$. Tale matrice ha rango 1 e quindi l'autospazio relatico a λ_2 ha dimensione 2 e la matrice A è diagonalizzabile.
(d) Calcoliamo V_1. Dobbiamo trovare le soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A - I$: si ottengono le due equazioni $y = 0$ e $z = 0$ e quindi $V_1 = \mathrm{Span}((1,0,0))$. Per calcolare V_2 dobbiamo trovare le soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A - 2I$. L'unica equazione non nulla di tale sistema è $-x + y = 0$. Ne concludiamo che $V_2 = \mathrm{Span}((1,1,0),(0,0,1))$.

04/02/2008

(1) Si consideri il seguente sottospazio U_h di $\mathbb{R}^3$, dipendente dal parametro reale h

$$U_h = \mathrm{Span}\{(2h, h-1, -2), (1,0,-1), ((h-2)^2, 0, -h)\}.$$

(a) Determinare la dimensione di U_h al variare del parametro h.
(b) Determinare le equazioni cartesiane di U_h al variare del parametro h.
(c) Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x + y + z = 0$. Determinare una base del sottospazio intersezione $V \cap U_h$ al variare del parametro h.

Soluzione.

(a) La dimensione di U_h è pari al rango della matrice le cui colonne sono formate dai vettori che lo generano. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2h & (h-2)^2 \\ 0 & h-1 & 0 \\ -1 & -2 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2h & (h-2)^2 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 2h-2 & h^2-5h+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2h & (h-2)^2 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & (h-1)(h-4) \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che $\dim U_1 = 1$, $\dim U_4 = 2$ e infine, per $h \neq 1, 4$, $\dim U_h = 3$.

(b) Caso $h = 1$. Il sottospazio U_h ha dimensione 1 e pertanto una sua base è data da un suo qualunque vettore non nullo, ad esempio $(1, 0, -1)$. Le equazioni cartesiane sono date da 2 equazioni lineari omogenee non multiple l'una dell'altra soddisfatte dal vettore $(1, 0, -1)$. Tali equazioni sono ad esempio $y = 0$ e $x + z = 0$.
Caso $h = 4$. Il sottospazio U_4 ha dimensione 2 ed una sua base è $((1, 0, -1), (8, 3, -2))$. L'equazione cartesiana è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 8 & x \\ 0 & 3 & y \\ -1 & -2 & z \end{pmatrix} = 0.$$

Utilizzando ancora l'algoritmo di Gauss otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & x \\ 0 & 3 & y \\ -1 & -2 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & x \\ 0 & 3 & y \\ 0 & 6 & z+x \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & x \\ 0 & 3 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di U_4 è quindi $z + x - 2y = 0$.
Caso $h \neq 1, 4$. In questo caso U_h è tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi non ha equazione cartesiana.

(c) Caso $h = 1$. Essendo $\dim U_1 = 1$ l'intersezione con V può essere solamente lo stesso U_1 oppure il sottospazio nullo. Prendiamo il vettore $(1, 0, -1)$ base di U_1. Siccome tale vettore soddisfa l'equazione di V concludiamo che $U_1 \cap V = U_1$ e quindi una sua base è data proprio da $(1, 0, -1)$.
Caso $h = 4$. In questo caso risolviamo il sistema dato dalle equazioni cartesiane di U_4 e V.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni di questo sistema sono date dai multipli di $(1, 0, -1)$ e quindi tale vettore è una base di $U_4 \cap V$.
Caso $h \neq 1, 4$. In questo caso si ha $U_h \cap V = V$ e quindi basta trovare una base di V. Questa è data da 2 vettori non proporzionali che soddisfano l'equazione $x + y + z = 0$. Si può ad esempio scegliere i due vettori $(1, 0, -1)$ e $(1, -1, 0)$.

(2) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2k & 0 & k \\ -2-4k & 1 & 2k \\ -6k-3k^2 & 0 & 3k+k^2 \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro reale k.

(a) Si verifichi che gli autovalori della matrice A sono 1, k e k^2.
(b) Si determinino i valori di k per i quali la matrice A risulta diagonalizzabile.

(c) Determinare gli autospazi di A nei casi in cui A non è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) Si può procedere in 2 modi. Un primo metodo è quello di verificare che le 3 matrici $A-I$, $A-kI$ ed $A-k^2I$ hanno tutte il determinante uguale a zero. In alternativa calcoliamo il polinomio caratteristico e verifichiamo che ammette le 3 soluzioni $1, k, k^2$. Seguiamo questa seconda pista. Calcoliamo il determinante utilizzando la regola di Laplace rispetto alla seconda colonna.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -2k-\lambda & 0 & k \\ -2-4k & 1-\lambda & 2k \\ -6k-3k^2 & 0 & 3k+k^2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2k-\lambda & k \\ -6k-3k^2 & 3k+k^2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(k^3-k^2\lambda-k\lambda+\lambda^2).\end{aligned}$$

A questo punto è evidente che sostituendo $1, k, k^2$ si ottiene 0.

(b) Se $k \neq 0, \pm 1$ i 3 autovalori sono distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile.
Se $k = 0$ l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2. Determiniamo la sua molteplicità geometrica. Questa sarà pari a 3 meno il rango delle matrice $A = A - 0I$ (con $k = 0$). Tale matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha palesemente rango 1 e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 2 e la matrice è diagonalizzabile.
Se $k = -1$ l'autovalore 1 ha molteplicità 2. Anche in questo caso la matrice $A - I$ ha rango 1 e quindi la matrice A risulta diagonalizzabile.
Caso $k = 1$. In questo caso abbiamo l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 3. Calcoliamo il rango della matrice $A - I$ (con $k = 1$). Abbiamo

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 1, quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è 2 che non coincide con la sua molteplicità algebrica. La matrice A non è pertanto diagonalizzabile.

(c) Siamo nel caso $k = 1$. Abbiamo un solo autovalore e quindi un solo autospazio. Questo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A-I$ (vedi punto precedente). Otteniamo quindi l'equazione cartesiana $-3x + z = 0$ per tale sottospazio.

18/02/2008

(1) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di vettori di $\mathbb{R}^2$. Siano inoltre T il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana $x - 2y = 0$ e

$$W := \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} - \mathbf{v} \in T\}$$

(a) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
Basterà verificare che W è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Siano $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ e $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$ appartenenti a W, cioè tali che $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{t}_1 \in T$ e $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}_2 \in T$. La loro somma è $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Si ha

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \in T,$$

in quanto T è uonspazio vettoriale e quindi $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in W$. Riguardo il prodotto per uno scalare sia $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W$ e quindi tale che $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{t} \in T$. Verifichiamo che $\lambda \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) \in W$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. *Si ha*

$$\lambda \cdot \mathbf{u} - \lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{t} \in T.$$

(b) Determinare le equazioni cartesiane ed una base di W. *Consideriamo in* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *le coordinate* x_1, x_2, x_3, x_4 *rispetto alla base* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{0}), (\mathbf{e}_2, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1), (\mathbf{0}, \mathbf{e}_2)$*, dove* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *è la base canonica di* $\mathbb{R}^2$*. Il vettore* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ *se, per definizione,* $(x_1 - x_3, x_2 - x_4) \in T$*, cioè se* $x_1 - x_3 - 2(x_2 - x_4) = 0$*. Quest'ultima è l'equazione cartesiana di* W*, che ha quindi dimensione 3. Una sua base è data da tre vettori indipendenti che la soddisfano, ad esempio,* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), (2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)$.

(c) Determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ complementare a W.
Un complementare di W *è generato da un qualunque vettore che non vi appartiene, cioè da un qualunque vettore che non siddisfa la sua equazione cartesiana. Possiamo ad esempio scegliere lo spazio generato dal vettore* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{0})$.

(2) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$f(1,-1,0) = (2,-2,0),\ f(1,0,1) = (2,-3,-1),\ f(0,1,-1) = (-6,5,1).$$

(a) Verificare che f è diagonalizzabile; *Determiniamo la matrice associata ad* f *rispetto alla base canonica. Detta* $\mathcal{B} = ((1,-1,0),(1,0,1),(0,1,-1))$ *abbiamo*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *abbiamo bisogno della seguente matrice*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) &= (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) &= M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gli autovalori sono chiaramente $\lambda_1 = -1$ *con* $\mu_a(-1) = 2$ *e* $\lambda_2 = 2$ *con* $\mu_a(2) = 1$*. Per verificare che* f *è diagonalizzabile basta verificare che* $\mu_g(-1) = 2$*. Si ha chiaramente* $rk(A+I) = 1$ *e quindi* $\mu_g(-1) = 2$.

(b) Determinare le equazioni cartesiane di ciascun autospazio;
Le equazioni cartesiane sono quelle associate alla matrice $A - \lambda I$*. Per* λ_1 *otteniamo* $y - z = 0$*. Per* λ_2 *otteniamo le due equazioni* $x + y = 0$ *e* $z = 0$.

(c) Detta A la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica, determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
Basterà scegliere una matrice le cui colonne formano una base di autovettori. Si può prendere ad esempio

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Deteminare tutte le matrici diagonali simili ad A.
Sono date dalle possibili permutazioni degli autovalori lungo la diagonale e sono quindi le 3 matrici
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$