ESAMI DI MATEMATICA DISCRETA 2007/2008

03/06/2008

(1) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ di coordinate (x, y, z, t) rispetto alla base canonica si considerino il sottospazio W_h di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x - y - t = 0 \\ z - y + ht = 0 \end{cases},$$
e il sottospazio
$$U_k = \text{Span}\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, k)\}.$$

(a) Determinare $\dim W_h$ e $\dim U_k$ al variare dei parametri h e k.
Si ha $\dim W_h = 2$ *per ogni* h *in quanto le equazioni cartesiane di* W_h *sono sempre indipendenti. Per determinare* $\dim U_k$ *basterà calcolare il rango della matrice*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$
Si ha quindi $\dim(U_k) = 3$ *per* $k \neq 2$ *e* $\dim U_2 = 2$.

(b) Determinare una base per W_h e U_k al variare dei parametri h e k.
Una base di W_h *è data da due vettori indipendenti che soddisfano le sue equazioni cartesiane. Si può ad esempio scegliere* $((1, 1, 1, 0), (1, 0, -h, 1))$. *Se* $k \neq 2$ *una base di* U_k *è chiaramente* $((1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, k))$, *mentre se* $k = 2$ *una base di* U_2 *è data da* $((1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1))$.

(c) Verificare che $\dim(W_h + U_k) \geq 3$ per ogni k e h. Determinare i valori di h e k per cui $\dim(W_h + U_k) = 3$.
Se $k \neq 2$ *si ha* $\dim(W_h + U_k) \geq 3$ *in quanto* $\dim U_k = 3$. *Se* $k = 2$ *è sufficiente verificare che* U_2 *non coincide mai con* W_h. *In effetti, il vettore* $(1, 0, -1, 1)$ *non appartiene mai a* W_h *in quanto non soddisfa la sua prima equazione cartesiana. La dim*$(W_h + U_k)$ *è pari al rango della seguente matrice*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -h & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2h+2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$
Concludiamo quindi che $\dim(W_h + U_k) = 3$ *se e solo se* $k = 2$ *e* $h = 1$.

(d) In corrispondenza a tali valori determinare una base per $W_h \cap U_k$.
In questo caso si ha $\dim(W_1 \cap U_2) = 1$ *per l'identità di Grassmann. Una sua base è data da* $(1, 0, -1, 0)$.

(2) Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x + y - z - t = 0$.

(a) Si verifichi che $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, -1, 0, 0)$ è una base di W.
W *ha dimensione 3. Basta quindi verificare che i vettori di* $\mathcal{B}$ *sono in* W *e che siano indipendenti. L'appartenenza a* W *si verifica immediatamente tramite l'equazione cartesiana. Riguardo l'indipendenza calcoliamo il rango della matrice*
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango è 3 e quindi $\mathcal{B}$ è una base di W.

(b) Sia $f : W \to W$ la trasformazione lineare definita ponendo

$$\begin{aligned} f(1,0,1,0) &= (-1,0,-1,0) \\ f(0,1,0,1) &= (1,1,1,1) \\ f(1,-1,0,0) &= (1,5,2,4) \end{aligned}$$

Si verifichi che la trasformazione lineare $f : W \to W$ è ben posta;
Bisogna verificare che l'immagine di un qualunque vettore di W è ancora in W. Per fare ciò è sufficiente verificare che le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ appartengono ancora a W.E ciò si verifica facilmente con l'equazione cartesiana di W.

(c) Si verifichi che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detti b_1, b_2, b_3 i vettori di $\mathcal{B}$, bisogna verificare che $f(b_1) = -1b_1+0b_2+0b_3$, $f(b_2) = 1b_1+1b_2+0b_3$ e che $f(b_3) = 2b_1 + 4b_2 - 1b_3$. Queste verifiche sono ovvie.

(d) Si discuta la diagonalizzabilità di f;
Basta discutere la diagonalizzabilità della matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Essendo tale matrice triangolare gli autovalori sono i coefficienti sulla diagonale. Gli autovalori sono 1 con molteplicità 1 e -1 con molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica dell'autovalore -1 è pari a 3 meno il rango di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) + I$. Tale matrice ha rango 1 e quindi f è diagonalizzabile.

(e) Si determinino gli autospazi di f.
Determiniamo l'autospazio V_1. Le 2 equazioni cartesiano che ne risultano (rispetto alle coordiante della base $\mathcal{B}$ sono $-2x_1+x_2+2x_3 = 0$ e $x_3 = 0$. Una base è quindi data da $(1,2,0)_{\mathcal{B}} = (1,2,1,2)$. Determiniamo V_{-1}. In questo caso l'unica equazione è $x_2 + 2x_3 = 0$. Una base di V_{-1} è quindi data dai due vettori $(1,0,0)_{\mathcal{B}} = (1,0,1,0)$ e $(0,2,-1)_{\mathcal{B}} = (-1,3,0,2)$.

07/07/2008

(1) Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2 sia S l'insieme delle matrici simmetriche (cioè coincidenti con la propria trasposta) ed A il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche (cioè coincidenti con la propria trasposta cambiata di segno). Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in S \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \in A.$$

(a) Verificare che S ed A sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
(b) Determinare una base di S ed una base di A.
(c) Verificare che la somma $S + A$ è diretta e si ha $S \oplus A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluzione.

(a) Si ha $S = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M = M^t\}$ e $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M = -M^t\}$. Dobbiamo verificare che S ed A sono chiusi rispetto alla somma ed al prodotto per uno scalare, o più semplicemente rispetto alla combinazione lineare. Se $M_1, M_2 \in S$ allora

$$(hM_1 + kM_2)^t = (hM_1)^t + (kM_2)^t = hM_1^t + kM_2^t = hM_1 + kM_2.$$

Si ha quindi che anche la matrice $hM_1 + kM_2$ è simmetrica e quindi S è uno spazio vettoriale. Il procedimento per A è del tutto analogo.

(b) Per definizione si ha che S è costituito da tutte le matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi che ogni matrice si esprime in modo unico come combinazione lineare delle 3 matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto queste 3 matrici formano una base di S. Le matrici di A sono del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

È quindi evidente che ogni matrice di questo tipo è u multiplo scalare della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questa matrice forma una base di A.

(c) Dal punto precedente sappiamo che $\dim S = 3$ e $\dim A = 1$ per dimostrare che la loro somma è diretta e che quindi è uguale a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ basterà far vedere che l'interesezione è banale. Sia quindi $M \in S \cap A$. Ne deduciamo che $M = M^t = -M^t = -M$. Ma l'unica matrice uguale al suo opposto è la matrice nulla e concludiamo.

(2) Sia α un parametro reale e $F_\alpha : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ l'endomorfismo definito da

$$F_\alpha(x, y, z) = (x, \mathrm{sen}\alpha\, y + \cos\alpha\, z, \cos\alpha\, y - \mathrm{sen}\alpha\, z),$$

dove $\mathrm{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sono le funzioni seno e coseno. Si rammenta che $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ per ogni α.

(a) Determinare gli autovalori di F_α;

(b) Determinare gli autospazi di F_α.

(c) Verificare che gli endomorfismi F_α sono tutti simili tra loro.

Soluzione.

(1) La matrice associata ad F_α rispetto alla base canonica è

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha \end{bmatrix}$$

Determiniamo il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \det(M_\alpha - \lambda I) &= (1-\lambda)((\mathrm{sen}\alpha - \lambda)(-\mathrm{sen}\alpha - \lambda) - \cos^2\alpha) \\ &= (1-\lambda)(-(\mathrm{sen}^2\alpha - \lambda^2) - \cos^2\alpha) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 1.

(2) Dobbiamo determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Questa sarà pari a tre meno il rango della matrice $M_\alpha - I$. Scriviamo tale matrice

$$M_\alpha - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha - 1 & \cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

Per capire se le ultime 2 righe sono proporzionali è sufficiente calcolare il determinante della matrice composta dalle ultime 2 righe e dalle ultime due colonne. Si ha

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\alpha - 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha - 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Concludiamo che $M_\alpha - I$ ha rango 1 e l'equazione cartesiana di V_1 è data da $(\text{sen}\alpha - 1)y + (\cos\alpha)z = 0$. L'autospazio V_{-1} ha dimensione 1 ed le sue equazioni cartesiane sono determinate da 2 righe non proporzionali della matrice $M_\alpha + 1$. Ad esempio scegliendo le prime 2 righe otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 \\ (\text{sen}\alpha + 1)y + (\cos\alpha)z = 0 \end{cases}$$

(3) Dal punto precedente gli endomorfismi F_α sono tutti diagonalizzabili ed hanno gli stessi autovalori. Possono quindi essere rappresentati con la matrice diagonale degli autovalori e sono quindi tutti simili tra loro.

15/09/2008

(1) Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 2 nella variabile t. Siano

$$V_0 = \{P(t) \in V \mid P(0) = 0\} \quad \text{e} \quad V_1 = \{P(t) \in V \mid P(1) = 0\}.$$

(a) Verificare che V_0 e V_1 sono sottospazi vettoriali di V;
(b) Determinare una base per V_0 ed una base per V_1;
(c) Dette (x, y, z) le coordinate di V rispetto alla base $(1, t, t^2)$ si determinino le equazioni cartesiane di V_0 e di V_1.
(d) Si verifichi che la somma $V_0 + V_1$ non è diretta determinando l'intersezione $V_0 \cap V_1$.

(2) Sia k un parametro reale ed

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -k \\ 0 & 1 & k^2 - k & k - k^2 - 2 \\ 0 & 0 & k^2 - k - 1 & k - k^2 \\ 0 & 0 & k^2 - k & k - k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di A_k al variare del parametro k;
(b) Determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A_k determinando l'unico valore di k per il quale A_k risulta diagonalizzabile.
(c) Posto k uguale a tale valore si discuta la diagonalizzabilità della matrice $(A_k)^2$.

12/01/2009

(1) Sia $\mathbb{R}_5[t]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 5 nella variabile t con coordinate $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ rispetto alla base $(1, t, t^2, t^3, t^4, t^5)$ e sia V l'insieme dei polinomi in $\mathbb{R}_5[t]$ che sono multipli di $t^2 - 1$.
(a) Verificare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_5[t]$;
(b) Determinare delle equazioni cartesiane di V;
(c) Determinare una base di V;
(d) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}_5[t]$ tale che $W \oplus V = \mathbb{R}_5[t]$.

(2) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
(a) Determinare una base (b_1, b_2, b_3) di W;
(b) Sia $f : W \to W$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 2b_1 \\ f(b_2) &= 3b_1 - (k+1)b_2 + kb_3 \\ f(b_3) &= 3b_1 - kb_2 + (k-1)b_3 \end{aligned}$$

Determinare gli autovalori di f al variare del parametro k;
(c) Determinare per quale valore del parametro k l'applicazione f risulta diagonalizzabile;
(d) In corrispondenza a tale valore determinare una base di autovettori di W.

05/02/2009

(1) Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e sia

$$V = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : B = AC \text{ per qualche } C \in M_2(\mathbb{R}\}.$$

(a) Verificare che V è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$;
(b) Determinare delle equazioni cartesiane di V;
(c) Determinare una base di V;
(d) Determinare un sottospazio W di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $W \oplus V = M_2(\mathbb{R})$.

(2) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
(a) Determinare una base (b_1, b_2, b_3) di W;
(b) Sia $f : W \to W$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 2b_1 \\ f(b_2) &= 3b_1 - (k+1)b_2 + kb_3 \\ f(b_3) &= 3b_1 - kb_2 + (k-1)b_3 \end{aligned}$$

Determinare gli autovalori di f al variare del parametro k;
(c) Determinare per quale valore del parametro k l'applicazione f risulta diagonalizzabile;
(d) In corrispondenza a tale valore determinare una base di autovettori di W.

26/02/2009

(1) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ dato da

$$W = Span\{(1,2,3,4), (2,1,-1,0), (0,1,2,3), (1,-1,0,-2)\}.$$

Determinare
(a) $\dim W$;
(b) le equazioni cartesiane di W;
(c) una base di W;
(d) un complemento di W in $\mathbb{R}^5$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ e $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ una sua base. Sia f l'endomorfismo di V dato da

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 3 & -2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Determinare
(a) gli autovalori di f
(b) gli autospazi di f
(c) una base $\mathcal{C}$ di V tale che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ sia una matrice triangolare ma non diagonale.