ESAMI DI MATEMATICA DISCRETA 2009/2010

09/06/2009

(1) In $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio vettoriale

$$W_k = Span\{(2,1,0,1),(1,1,1,1),(k,1,0,-1)\}$$

e il sottospazio vettoriale U dato da tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ aventi somma delle coordinate nulla e appartenenti al nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_3) = (1,-1) \text{ e } f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_4) = (-1,1)$$

(dove gli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ sono i vettori della base canonica).

(a) Determinare base ed equazioni cartesiane di U e di W_k, al variare di k.

(b) Determinare base ed equazioni cartesiane di $U \cap W_k$ e di $U + W_k$ al variare di k.

Soluzione. Per determinare la dimensione di W_k basta calcolare il rango della matrice le cui righe sono costituite dalle coordinate dei vettori che generano W_k.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1-k & -k & -1-k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha sempre rango massimo e quindi $\dim W_k = 3$ per ogni valore di k. Una sua base è data dai 3 vettori di partenza o anche dai 3 vettori ottenuti al termine dell'algortimo di Gauss, cioè $(1,1,1,1)$, $(0,1,2,1)$ e $(0,0,k-2,-2)$. L'equazione cartesiana si ottiene imponendo il seguente determinante uguale a zero

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & k-2 & z \\ 1 & 1 & -2 & t \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 2 & k-2 & z-x \\ 0 & 1 & -2 & t-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & y-x \\ 2 & k-2 & z-x \\ 1 & -2 & t-x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & y-x \\ 0 & k-2 & z-x-2(y-x) \\ 0 & -2 & t-x-(y-x) \end{pmatrix} = (k-2)(t-y) + 2(z+x-2y) \\
&= 2x-(k+2)y+2z+(k-2)t
\end{aligned}$$

L'equazione cartesiana di W_k è quindi $2x-(k+2)y+2z+(k-2)t = 0$.

Le equazioni di f sono $f(x,y,z,t) = (x-y+z-t, -x+y-z+t)$. Il nucleo di f ha quindi equazione cartesiana $x-y+z-t = 0$. Gli elementi di U, oltre a soddisfare questa equazione devono soddisfare anche la $x+y+z+t = 0$. Queste due equazioni sono chiaramente indipendenti e quindi abbiamo che le equazioni cartesiane di U sono

$$\begin{cases} x-y+z-t = 0 \\ x+y+z+t = 0. \end{cases}$$

La dimensione di U è quindi $4-2 = 2$ e una sua base è data da 2 vettori non proporzionali che soddisfano le equazioni cartesiane, ad esempio $(1,0,-1,0)$ e $(0,1,0,-1)$.

Studiamo l'intersezione $U \cap W_k$. Mettiamo a sistema le due equazioni cartesiane di U con quella di W_k e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -k-2 & 2 & k-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -k & 0 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ deduciamo che $\dim(U \cap W_0) = 2$. In questo caso si ha quindi necessariamente $U \cap W_0 = U$ e quindi anche $U + W_0 = W_0$. Basi ed equazioni cartesiane sono state quindi ottenute nel punto (a).

Se $k \neq 0$ si ha invece $\dim(U \cap W_k) = 1$ le sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y + t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$U \cap W_k$ non dipende quindi da k per $k \neq 0$ ed una sua base è data dal vettore $(1, 0, -1, 0)$. Per Grassmann $\dim(U + W_k) = 4$ e quindi $U + W_k = \mathbb{R}^4$. Una sua base è quindi la base canonica e le sue equazioni cartesiane sono l'insieme vuoto.

(2) Sia $V \subseteq \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 nella variabile t che si annullano per $t = 2$. Sia inoltre $f : V \to V$ data da $f(P(t)) = P(4 - t)$.
 (a) Determinare una base per V;
 (b) Verificare che f è un endomorfismo di V;
 (c) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base determinata nel punto (a);
 (d) Determinare gli autospazi di f, deducendone la diagonalizzabilità.

Soluzione. Rispetto alla base $(t^3, t^2, t, 1)$ il sottospazio V ha equazione cartesiana $8x_1+4x_2+2x_3+x_4 = 0$. Pertanto $\dim V = 4 - 1 = 3$. Una sua base è data quindi da 3 polinomi di V indipendenti. Si può ad esempio prendere $\mathcal{B} = (t - 2, t^2 - 4, t^3 - 8)$.

f è chiaramente un'applicazione lineare in quanto $f(P(t) + Q(t)) = P(4 - t) + Q(4 - t) = (P + Q)(4 - t) = f((P + Q)(t))$ e similmente per il prodotto per uno scalare. Bisogna solo verificare che $Imf \subseteq V$. Ma questo è immediato in quanto se $P(t)$ si annulla per $t = 2$ anche $P(4 - t)$ si annulla per $t = 2$. Detti $\mathbf{b}_1 = t - 2$, $\mathbf{b}_2 = t^2 - 4$, $\mathbf{b}_3 = t^3 - 8$ si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}_1) &= (4 - t) - 2 = -t + 2 = -\mathbf{b}_1 \\ f(\mathbf{b}_2) &= (4 - t)^2 - 4 = t^2 - 4t + 12 = \mathbf{b}_2 - 8\mathbf{b}_1 \\ f(\mathbf{b}_3) &= (4 - t)^3 - 8 = -t^3 + 12t^2 - 48t + 64 - 8 = -\mathbf{b}_3 + 12\mathbf{b}_2 - 48\mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -48 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essendo tale matrice triangolare gli autovalori sono i coefficienti che appaiono sulla diagonale, cioè 1 con molteplicità 1 e -1 con molteplicità 2. Determiniamo gli autospazi. Per $\lambda = -1$ si ha

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -48 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di V_{-1} è quindi $y + 6z = 0$ (rispetto alla base $\mathcal{B}$). Una base di V_{-1} è data ad esempio da $\mathbf{b}_1 = t - 2$ e $6\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 = 6(t^2 - 4) - (t^3 - 8) = -t^3 + 6t^2 - 16$.

Per $\lambda = 1$ si ha

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - I = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -48 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di V_1 è quindi

$$\begin{cases} 2x + 8y + 48z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Una sua base è data da $4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = 4(t - 2) - (t^2 - 4) = -t^2 + 4t - 4$.

06/07/2009

(1) Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali nella variabile t di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R}_2[t] &\to \mathbb{R}^4 \\ P(t) &\mapsto (P(-1), P(0), kP(1), P(2)). \end{aligned}$$

(a) Verificare che f_k è iniettiva per ogni k;
(b) Determinare equazioni cartesiane ed una base per Imf_0;
(c) Determinare una base per $Imf_0 \cap Imf_1$.

Soluzione. (a)Basterà dimostrare che $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, dove $\mathbf{0}$ indica il polinomio nullo. In effetti $f(a+bt+ct^2) = (a-b+c, a, k(a+b+c), a+2b+4c)$. Il nucleo è determinato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a=0 \\ k(a+b+c)=0 \\ a+2b+4c=0 \end{cases}$$

e si verifica facilmente che questo sistema ammette la sola soluzione banale per ogni valore di k.
(b) Siccome f_0 è iniettiva si ha $\dim Imf_0 = 3$ e quindi basterà trovare una equazione lineare soddisfatta da tutti gli elementi di Imf_0. Una tale equazione è chiaramente $x_3 = 0$ che quindi è l'equazione cartesiana. Una base è data dai vettori della base canonica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4$.
(c) Siccome Imf_0 e Imf_1 non coincidono (ad esempio perchè la terza coordinata negli elementi di Imf_0 è sempre zero mentre questo non è vero per Imf_1) si ha $Imf_0 + Imf_1 = \mathbb{R}^4$ e quindi, per l'identità di Grassamnn, $\dim(Imf_0 \cap Imf_1) = 2$. Osservando poi che se $P(1) = 0$ si ha $f_0(P) = f_1(P)$ una base per $Imf_0 \cap Imf_1 = 2$ è data dalle immagini di 2 polinomi indipendenti che soddisfano questa condizione (il fatto che le immagini siano ancora indipendenti è garantito dall'iniettività di f_0 e f_1). Una base è quindi data dai 2 vettori $f_0(t-1) = (-2,-1,0,1)$ e $f_0(t^2-1) = (0,-1,0,3)$.

(2) Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali.
Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di f;
(b) determinare gli autospazi di f;
(c) determinare, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.
Soluzione. (a) Determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Si ha

$$M = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è quindi dato da

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left[-\lambda\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= (1-\lambda)^2(1+\lambda)(2+\lambda) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono pertanto 1, -1 e -2 con molteplicità algebrica 2, 1 e 1 rispettivamente.
(b) $V(1)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $M - I$. Le sue equazioni cartesiane sono $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ (e quindi f è diagonalizzabile) e una base per $V(1)$ è data da 2 matrici linearmente indipendenti le cui coordianate soddisfano queste equazioni cartesiane, ad esempio si può scegliere

$$\mathcal{B}_{V(1)} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Similmente si possono ottenere gli altri autospazi (che sappiamo già essere di dimensione 1) che avranno basi date da

$$\mathcal{B}_{V(-1)} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \mathcal{B}_{V(-2)} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale è data dall'unione delle basi degli autospazi ottenute nel punto (b) ad esempio si può scegliere

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

In tal caso si avrà

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

17/09/2009

(1) In $\mathbb{R}^5$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_3 = x_5 \text{ e } x_2 = x_4\} \\ W_k &= \text{Span}\{(1,2,3,4,5), (k+2, 2k, k, k, 0)\} \end{aligned}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la dimensione e una base di U;
(b) Determinare la dimensione e una base di W_k al variare del parametro k;
(c) Determinare la dimensione di $U \cap W_k$ al variare del parametro k;
(d) Determinare, se esiste, un sottospazio $V \subseteq R^5$ tale che $\mathbb{R}^5 = U \oplus V = W_k \oplus V$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(a) U è dato dai vettori della forma (h, k, h, k, h) al variare di h e k. Si ha quindi $U = Span\{(1,0,1,0,1), (0,1,0,1,$ Siccome questi 2 vettori non sono proporzionali sono anche indipendenti formano una base e quindi la dimensione di U è 2.

(b) E' evidente che i 2 vettori che generano W_k non sono proporzionali per ogni k. Ne segue che sono indipendenti e quindi formano una base. La dimensione di W_k è quindi 2 per ogni valore di k.

(c) Determiniamo la dimensione di $U+W_k$ al variare di k. Basterà determinare il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ k+2 & 2k & k & k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2k & -2 & k & -k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -k & -k-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-k & 2-k \end{bmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 3 per $k = 2$ e 4 per $k \neq 2$. Concludiamo che se $k = 2$ $\dim(U+W_2) = 3$ e quindi $\dim(U \cap W_2) = 1$, mentre per $k \neq 2$ abbiamo $\dim(U+W_2) = 4$ e quindi $\dim(U \cap W_2) = 0$.

(d) Si osserva facilmente che U e W_k ammettono tutti il sottospazio V di equazioni cartesiane $x_1 = x_2 = 0$ come complemento.

(2) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $g(x, y, z) = (y + z, x - z)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(2, 1) = (2, 1, -1)$ e $f(0, 1) = (0, 1, 1)$. Siano $\mathcal{E}_{(2)}$ e $\mathcal{E}_{(3)}$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente.

(a) Deteminare $M^{\mathcal{E}_{(2)}}_{\mathcal{E}_{(3)}}(f)$;
(b) Deteminare $M^{\mathcal{E}_{(3)}}_{\mathcal{E}_{(2)}}(g)$;
(c) Deteminare autovalori ed autospazi di $g \circ f$ e $f \circ g$.

(a) Si ha $f(1, 0) = \frac{1}{2} f(2, 1) - \frac{1}{2} f(0, 1) = \frac{1}{2}((2, 1, -1) - (0, 1, 1)) = (1, 0, -1)$. Ne segue

$$M^{\mathcal{E}_{(2)}}_{\mathcal{E}_{(3)}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$M^{\mathcal{E}_{(3)}}_{\mathcal{E}_{(2)}}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Si ha

$$M^{\mathcal{E}_{(2)}}_{\mathcal{E}_{(2)}}(g \circ f) \quad = \quad M^{\mathcal{E}_{(3)}}_{\mathcal{E}_{(2)}}(g) M^{\mathcal{E}_{(2)}}_{\mathcal{E}_{(3)}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è det $\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3$ e quindi gli autovalori sono -3 e 1, entrambi con molteplicità 1. Calcoliamo gli autospazi. V_{-3} ha equazione cartesiana $x+y=0$ mentre V_1 ha equazione cartesiana $x - y = 0$.

$$M^{\mathcal{E}_{(3)}}_{\mathcal{E}_{(3)}}(f \circ g) \quad = \quad M^{\mathcal{E}_{(2)}}_{\mathcal{E}_{(3)}}(f) M^{\mathcal{E}_{(3)}}_{\mathcal{E}_{(2)}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è det $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-1)$.

Gli autovalori sono quindi 0,-3 e 1. I relativi autospazi sono $V_0 = Span\{(1,-1,1)\}$, $V_{-3} = Span\{(-1,1,2)\}$ e $V_1 = Span\{(1,1,0)\}$

18/01/2010

(1) In $\mathbb{R}^4$, con coordinate cartesiane (x, y, z, t), sia H il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane $2x - y = 2t = 0$ e

$$K = \mathrm{Span}\{(1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5)\}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di H e di K;
(b) Determinare la dimensione e una base di $H \cap K$ e di $H + K$.
(c) Stabilire se il vettore $(1,2,3,3)$ appartiene ad $H + K$ ed in caso affermativo esprimerlo in tutti i modi possibili come somma di un vettore di H e di un vettore di K.

(2) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $x+y+z+t=0$.

(a) Determinrare una base $\mathcal{B}$ di W.

(b) Verificare che esiste un e un solo endomorfismo $f : W \to W$ che soddisfa

$$\begin{aligned} f(2,0,-1,-1) &= (6,-2,-7,3) \\ f(1,0,0,-1) &= (3,-1,-5,3) \\ f(1,-1,1,-1) &= (2,-2,-3,3). \end{aligned}$$

(c) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ calcolata nel punto (a).

(d) Studiare la diagonalizzabilità di f.

15/02/2010

(1) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1,1,1)$, $\mathbf{w} = (1,1,0,0)$ ed il sottospazio U di equazione cartesiana $x+y+z+t=0$.

(a) Determinare una base e le equazioni cartesiane di $H = \mathrm{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$.

(b) Determinare un vettore $\mathbf{z} \in U$ tale che $H \oplus \mathrm{Span}\{\mathbf{z}\} = \mathbb{R}^4$.

(c) Detto K il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane $y = z+t = 0$ stabilire se $K \subseteq H$.

(2) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dai 2 parametri a e b dato da

$$f(x, y, z) = (ax + z, ay + bz, x + by + az).$$

- (a) Verificare che gli autovalori di f sono sempre distinti e che quindi f è sempre diagonalizzabile.
- (b) Determinare a e b in modo che gli autovalori di f siano $1, 2, 3$. Determinare in tal caso gli autospazi di f.