ESAMI DI MATEMATICA DISCRETA 2009/2010

10/06/2010

(1) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio U di equazioni cartesiane $x+y-2z=0$,
$y-z+t=0$, $x-y-2t=0$ ed il sottospazio $W=Span\{(1,-2,1,0),(0,1,-1,1),(2,-3,1,1)\}$.
  (a) Determinare una base di U;
  (b) Determinare equazioni cartesiane di W.
  (c) Determinare $U\cap W$ e $U+W$;
  (d) Determinare un sottospazio complementare a W e uno complementare a U;

(2) Si consideri l'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dato da

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(5x-y+z,4x-2z,3x-3y+z).$$

  (a) Verificare che $\mathbf{u}=(1,1,0)$ è un autovettore di f.
  (b) Studiare la diagonalizzabilità di f su $\mathbb{R}^3$ (si consiglia di utilizzare una base contenente $\mathbf{u}$.
  (c) Detto U il sottospazio di equazione cartesiana $x-y+z=0$ verificare che la restrizione di f ad U è un endomorfismo di U.
  (d) Studiare la diagonalizzabilità di f ristretta ad U.

28/06/2010

(1) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $U=Span((1,0,1,0);(0,1,0,k))$ e
$W=Span((1,1,1,1);(1,k^2,1,k);(0,0,k^2-k,k-1))$ dipendenti da uno stesso parametro $k\in\mathbb{R}$.
  (a) Determinare la dimensione ed una base di U e di W al variare del parametro k;
  (b) Studiare la dimensione di $U+W$ al variare del parametro k. In quali casi la somma è diretta?
  (c) Per i valori di k per cui $U+W\neq\mathbb{R}^4$ determinare le equazioni cartesiane di $U+W$;
  (d) Determinare per quali valori di k esiste un sottospazio non nullo H di U tale che la somma $H+W$ sia diretta.

(2) Si considerino gli spazi vettoriali $V=\mathbb{R}^2$ e $W=\mathbb{R}_2[t]$. Siano

$$\mathbf{b}_1=(1,1),\ \ \mathbf{b}_2=(1,-1);\ \ \mathbf{p}_1=1+t,\ \ \mathbf{p}_2=1+t^2,\ \ \mathbf{p}_3=t+t^2.$$

  (a) Verificare che $\mathcal{B}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)$ e $\mathcal{P}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)$ sono basi ripettivamente di V e W.
  (b) Siano $F:V\to W$ e $G:W\to V$ le applicazioni lineari determinate da
  $F(\mathbf{b}_1)=2\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3$, $F(\mathbf{b}_2)=-\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+2\mathbf{p}_3$.
  $G(\mathbf{p}_1)=\mathbf{b}_2$, $G(\mathbf{p}_2)=\mathbf{b}_1$, $G(\mathbf{p}_3)=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$.
  Studiare l'iniettività di F e G.
  (c) Determinare gli autovalori di $F\circ G$ e di $G\circ F$;
  (d) Studiare la diagonalizzabilità di $F\circ G$ e di $G\circ F$;
  (e) Determinare gli autospazi di $F\circ G$ e di $G\circ F$.

28/09/2010

(1) Si consideri il seguente endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ dipendente da un parametro reale k

(2)

$$f_k(x,y,z)=(x+4z,(k^2-1)x+4ky-4z,-kx-4y).$$

  (a) Determinare base ed equazioni cartesiane di $Ker(f_k)$ al variare di k;
  (b) Determinare base ed equazioni cartesiane di $Im(f_k)$ al variare di k;
  (c) Determinare per quali valori di k $Ker(f_k)$ e $Im(f_k)$ hanno intersezione non banale;

(d) In corrispondenza a tali valori determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ che non appartiene nè a $Ker(f_k)$ né ad $Im(f_k)$.
(e) E' possibile trovare un tale vettore anche nei casi in cui $Ker(f_k)$ e $Im(f_k)$ hanno intersezion banale?

(3) Si consideri la base $\mathcal{B} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3})$ dove $\mathbf{b_1}$di $\mathbb{R}^3$ data daSia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f(x, y, z) = (x + 4y, -y, -2y + z).$$

(a) Verificare che f è diagonalizzabile;
(b) Determinare le equazioni cartesiane ed una base di ciascun autospazio;
(c) Detta A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia:

$$D = P^{-1}AP.$$

17/01/2011

(1) Sia $U_k \subseteq \mathbb{R}^5$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 2, 1, 2),\ \mathbf{v}_3 = (0, k^2, k - k^2, 0, 0).$$

(a) Si discuta l'indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ed estrarre dall'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di U_k al variare del parametro k;
(b) determinare se possibile un sottospazio W di $\mathbb{R}^5$, indipendente da k, tale che $U_k \oplus W = \mathbb{R}^5$ per ogni $k \neq 0$;
(c) determinare se possibile un sottospazio proprio V di $\mathbb{R}^5$ contenente U_k per ogni valore del parametro k.

Soluzione.

(a) Formiano la matrice A avene per righe le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ rispettivamente. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango di A è massimo cioè pari a 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & k^2 & k-k^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k^2 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Ne concludiamo che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 0$. Se $k \neq 0$ abbiamo che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano necessariamente una base di U_k. Se $k = 0$ una base di U_k è data da 2 suoi vettori indipendenti, ad esempio, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
(b) Abbiamo visto nel punto (a) che, per $k \neq 0$, riducendo a scala la matrice A otteniamo i 3 pivot proprio sulle prime 3 colonne. Ne segue che possiamo scegliere $W = Span\{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.
(c) Dalla riduzione a scala del punto (a), se $k \neq 0$ possiamo dividere l'ultima riga per k e concludiamo che il sottospazio U_k è contenuto nello spazio vettoriale V generato dai vettori

$$(1, 0, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1).$$

(2) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$f(x, y, z) = (22x + 48y + 24z, -12x - 26y - 12z, 3x + 6y + z).$$

e l'insieme ordinato $\mathcal{B} = \Big((8, -4, 1), (7, -4, 1), (-2, 1, 0)\Big)$.
(a) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$;
(b) determinare le matrici $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ indica la base canonica di $\mathbb{R}^3$;
(c) determinare autovalori ed autospazi di f;
(d) determinare tutte le matrici diagonali simili alla matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.

Soluzione.
(a) Per dimostrare che i vettori di $\mathcal{B}$ formano una base basta verificare che la matrice avente oer righe i vettori di $\mathcal{B}$ ha rango massimo. Questo si può verificare con l'algoritmo di Gauss leggendo le prime 3 colonne del calcolo del punto (b).
(b) Abbiamo $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id))^{-1}$.
Calcoliamo quindi tale inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Concludiamo che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Utilizzando la proprietà della composizione delle trasformazioni lineari abbiamo

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 48 & 24 \\ -12 & -26 & -12 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Dal punto (b) osserviamo che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale. Abbiamo quindi per definizione che f è diagonalizzabile. Ne deduciamo inoltre che gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 1 (sia algebrica che geometrica) e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità 2 (sia algebrica che geometrica). Gli autospazi sono generati dai vettori della base $\mathcal{B}$ corrispondenti agli autovalori. In particolare

$$\begin{aligned} V_1 &= Span\{(8, -4, 1)\} \\ V_{-2} &= Span\{(7, -4, 1), (-2, 1, 0)\} \end{aligned}$$

(d) Le matrici diagonali simili ad f sono le 3 matrici che si ottengono dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ permutando gli elementi sulla diagonale.

07/02/2011

(1) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti dal parametro reale k:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3),\ \mathbf{v}_2 = (0, k, -1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, 2).$$

(a) Si determini l'unico valore di k per cui i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Posto k pari a tale valore si verifichi che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti trovando un vettore $\mathbf{v}$ che si esprima in due modi distinti come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
(c) Posto $k = 0$ si determinino le matrici del cambiamento di base dalla base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ alla base canonica e viceversa.

Soluzione.
(a) Determiniamo il rango della matrice le cui righe sono formate dai coefficienti dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Procediamo riducendo a scala per righe tale matrice ed otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$ per ogni valore di k diverso da -1.
(b) Si puè scegliere ad esempio $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. Abbiamo infatti

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

(c) Posto $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ abbiamo chiaramente

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infine $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id))^{-1}$. Calcoliamo quindi tale inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ne deduciamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Si considerino l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazioni

$$f(x, y, z) = (x, 4x - 2y - 2z, 2x - 2y)$$

e l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$g(1, 0, 0) = (1, 1, 1),\ g(0, 1, 1) = (1, 0, 1),\ g(0, 1, 0) = (1, 1, 0).$$

(a) Posto $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ si determinino le matrici $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(g)$, dove $\mathcal{E}$ rappresenta la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g)$ associata all'applicazione $f \circ g$ rispetto alla base canonica.
(c) Stabilire se l'applicazione $f \circ g$ è diagonalizzabile.
(d) Determinare gli autospazi dell'applicazione $f \circ g$.

Soluzione.
(a) Determiniamo $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$. Sarà sufficiente sostituire le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ nelle equazioni di f. Otteniamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per comodità di notazione poniamo $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$ cosicché $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Per calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g)$ dobbiamo determinare le immagini tramite g dei vettori della base canonica ed esprimerli come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$. Si ha

$$g(1,0,0) = \mathbf{v}_1,\ g(0,1,0) = \mathbf{v}_3,$$
$$g(0,0,1) = g((0,1,1)-(0,1,0)) = g(0,1,1) - g(0,1,0) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

Ne deduciamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In alternatica si può considerare la base ausiliaria $\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,1),(0,1,0))$ su cui è definita g. Si osserva che, per definizione $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g) = I$ e si conclude che

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g) M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(id) \\ &= (M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(id))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Basterà svolgere il prodotto delle due matrici calcolate al punto precedente.

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f \circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Calcoliamo gli autovalori della matrice $A := M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f \circ g)$. Essendo tale matrice triangolare i suoi autovalori sono i coefficienti che appaiono sulla diagonale. Abbiamo quindi $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2. Per dimostrare la diagonalizzabilità è sufficiente calcolare il rango della matrice $A - 2I$. Tale matrice ha rango 1 e quindi l'autospazio relatico a λ_2 ha dimensione 2 e la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Calcoliamo V_1. Dobbiamo trovare le soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A - I$: si ottengono le due equazioni $y = 0$ e $z = 0$ e quindi $V_1 = \mathrm{Span}((1,0,0))$. Per calcolare V_2 dobbiamo trovare le soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A - 2I$. L'unica equazione non nulla di tale sistema è $-x + y = 0$. Ne concludiamo che $V_2 = \mathrm{Span}((1,1,0),(0,0,1))$.