PROVE D'ESAME DI MATEMATICA DISCRETA
A.A. 2010/2011

07/06/2011

(1) In $\mathbb{R}_3[t]$, lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile t di grado al piú 3, sia $u = t^2 - 5t + 6$ e $w = t^3 + t^2 - t - 1$.

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ contenente u e w;
Si può scegliere ad esempio $\mathcal{B} = (u, w, 1, t)$. Questi 4 vettori si esprimono tramite una matrice triangolare non singolare rispetto alla base canonica $(1, t, t^2, t^3)$ e sono pertanto una base.

(b) Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}_3[t]$ contenente w e complementare a $\mathrm{Span}(u)$;
Basta scegliere $W = Span(w, 1, t)$.

(c) *Scrivere $v = t^3 + t^2 + t + 1$ come somma di un elemento di W e uno di $Span(u)$; dalle nostre scelte si ha $v \in W$ e quindi basta scrivere $v = v + 0$.*

(d) Determinare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Si ha $v = (0, 1, 2, 2)_{\mathcal{B}}$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$$

e $f(1, 1, 1) = (2, 1, 2)$.

(a) Verificare che f é univocamente determinata;
Segue dal fatto che $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ è una base e che f è assegnata su questa base.

(b) Studiare la diagonalizzabilità di f;
Vogliamo scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. L'unica cosa non banale da calcolare sono le coordinate di $(2, 1, 2)$ rispetto a $\mathcal{B}$. Imponendo

$$(2, 1, 2) = a(1, 2, 0) + b(0, 0, 1) + c(1, 1, 1)$$

otteniamo la soluzione $a = b = -1$ e $c = 3$ da cui segue che $(2, 1, 2)_{\mathcal{B}} = (-1, -1, 3)$ e quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori sono quindi 0 con molteplicità algebrica 2 e 3 con molteplicità algebrica 1. Siccome sappiamo già che $\dim(V_0) = \dim(\ker(f)) = 2$ possiamo direttamente concludere che f è diagonalizzabile.

(c) Determinare gli autospazi di f;
Abbiamo già osservato che $V_0 = \ker(f)$; determiniamo V_3. Otteniamo le 2 equazioni $-3x - z = 0$ e $-3y - z = 0$ da cui concludiamo che $V_3 = Span(-1, -1, 3)_{\mathcal{B}} = Span(2, 1, 2)$.

(d) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica e le equazioni di f.
Il modo più standard di procedere è quello di calcolarsi le matrici del cambio di base. Abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id) = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo a questo punto calcolare

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi le equazioni di f sono

$$f(x,y,z) = (4x - 2y, 2x - y, 4x - 2y).$$

27/06/2011

(1) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio V di equazione cartesiana $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$. Siano U e W due sottospazi vettoriali di V di dimensione 2.

(a) Che dimensione può avere il sottospazio $U \cap W$?;
La dimensione di $U \cap W$ è al massimo 2 in quanto è un sottospazio di U. Per l'identità di Grassmann, siccome $\dim(U+W =\leq \dim(V) = 3$ *abbiamo che* $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) \geq 2 + 2 - 3 = 1$. *Concludiamo che tale dimensione può essere solo 2 (nel caso speciale in cui $U = W$) o 1 nel caso in cui $U \neq W$.*

(b) Verificare che $\mathcal{B} = ((1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,2,1,0))$ è una base di V;
Basta verificare che i vettori di $\mathcal{B}$ sono lineramente indipendenti (ad esempio verificando che il rango della matrice che ha per righe gli elementi di $\mathcal{B}$ ha rango 3) e che appartengono effettivamente a V (cioè soddisfano la sua equazione cartesiana).

(c) Si considerino su V le coordinate x, y, z rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sia quindi U dato dall'equazione cartesiana $x - y + z = 0$ e $W = \mathrm{Span}((1,1,0,0),(2,0,0,1))$. Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.
Determiniamo le coordinate dei vettori che generano W rispetto a $\mathcal{B}$. Si ha

$$(1,1,0,0) = (1,0,0)_{\mathcal{B}} \quad (2,0,0,1) = (2,1,-1)_{\mathcal{B}}.$$

Si vede a questo punto che $U \neq W$ e quindi per il punto (a) abbiamo $\dim(U \cap W) = 1$. *Un vettore non nullo di $U \cap W$ è quindi anche una base: possiamo scegliere facilmente proprio* $(2,1,-1)_{\mathcal{B}} = (2,0,0,1)$.

(2) Si consideri l'unico endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ determinato da
- $f(0,1,1,0) = (0,2,2,0)$;
- $f(1,0,0,0) = (4,1,0,-1)$;
- $f(0,1,0,0) = (0,3,0,1)$;
- $f(0,1,0,-1) = (0,2,0,-2)$.

(a) Scegliere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e determinare la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$;
Scegliamo $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e calcoliamo le immagini dei vettori della base canonica. Abbiamo:
- $f(1,0,0,0) = (4,1,0,-1)$;
- $f(0,1,0,0) = (0,3,0,1)$;
- $f(0,0,1,0) = f(0,1,1,0) - f(0,1,0,0) = (0,-1,2,-1)$;
- $f(0,0,0,1) = f(0,1,0,0) - f(0,1,0,-1) = (0,-1,0,3)$.

Abbiamo quindi

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Determinare gli autovalori di f;
Per come è definita f sappiamo già che 2 è un autovalore di f con molteplicità almeno 2 (ci sono 2 vettori indipendenti che sono autovettori di autovalore 2). Calcoliamo comunque il polinomio caratteristico per calcolare gli altri autovalori.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda) \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(8 - 6\lambda + \lambda^2) \\ &= (4-\lambda)^2(2-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che gli autovalori di f sono 2 e 4, entrambi con molteplicità algebrica 2.

(c) Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale, dove $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.
Siccome $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id)$ basterà scegliere $P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id)$, dove $\mathcal{C}$ è una qualunque base di autovettori di f.
Sappiamo dal testo dell'esercizio che l'autospazio dell'autovalore 2 è dato da

$$V_2 = Span((0,1,1,0),(0,1,0,-1)).$$

Calcoliamoci l'altro autospazio:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2 e quindi intento possiamo dire che f è diagonalizzabile e che la matrice P esiste. L'autospazio avrà equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + x_4 = 0$ e $x_3 = 0$ per cui

$$V_4 = Span((1,1,0,0),(0,1,0,-1)).$$

La matrice P può essere data da

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nel punto (a) si poteva benissimo scegliere anche la base $\mathcal{B} = ((0,1,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,1,0,-1))$ *su cui è definita la* f*. In tal caso avremmo avuto*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da tale matrice, essendo triangolare, si vedono benissimo gli autovalori di f*: sono gli elementi sulla diagonale. Il punto c poteva quindi essere risolto anche utilizzando quasta matrice ma ricordando che le coordinate che si ottengono degli autovettori sono relative alla base* $\mathcal{B}$*!*

11/07/11

(1) Si considerino i due sottospazi U e W di $\mathbb{R}_3[t]$, lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3 dati da

$$U = \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] : P(1) = 0\} \quad W = \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] : P(2) = 0\}$$

(a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di U e una base $\mathcal{C}$ di W;
(b) Determinare una base dell'intersezione $U \cap W$;
(c) Dette x, y, z le coordinate di U rispetto a $\mathcal{B}$, determinare le equazioni cartesiane di $U \cap W$ nelle coordinate x, y, z.

Soluzione.

(a) Sia U che W hanno dimensione 3. Si può scegliere

$$\mathcal{B} = (t^3 - 1, t^2 - 1, t - 1) \quad \mathcal{C} = (t^3 - 8, t^2 - 4, t - 2).$$

Infatti gli elementi di $\mathcal{B}$ sono indipendenti e si annullano in 1, e similmente quelli di $\mathcal{C}$.

(b) $U \cap W$ è contenuto propriamente in U e quindi al massimo ha dimensione 2. Due polinomi indipendenti che si annullano sia in 1 che in 2 sono quindi necessariamente una base di $U \cap W$. Si possono ad esempio considerare $(t-1)(t-2) = t^2 - 3t + 2$ e $t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t$.

(c) Consideriamo il generico polinomio di U di coordinate x, y, z rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$(x, y, z)_{\mathcal{B}} = x(t^3 - 1) + y(t^2 - 1) + z(t - 1).$$

Imponiamo che questo elemento appartenga anche a W, imponiamo cioè che si annulli anche in 2:

$$x(2^3 - 1) + y(2^2 - 1) + z(2 - 1) = 0,$$

da cui ricaviamo l'equazione cartesiana $7x + 3y + z = 0$.

(2) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$.

(a) Verificare che $(1, -2, 1)$ e $(1, 0, -1)$ sono autovettori di f per ogni $a \in \mathbb{R}$;
(b) Verificare che $a + 2$ è un autovalore di f;
(c) Determinare per quali valori di a esiste un autovalore con molteplicità maggiore di 1;
(d) Studiare la diagonalizzabilità di f al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

(a) Basta verificare che l'immagine di questi vettori tramite f è un multiplo scalare dei vettori stessi. Abbiamo

$$f(1, -2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui ricaviamo $f(1,-2,1) = (-1+a, 2-2a, a-1) = (a-1)(1,-2,1)$ e quindi $(1,-2,1)$ è un autovettore di autovalore $a-1$. Similmente calcoliamo $f(1,0,-1) = (1-a)(1,0,-1)$ e quindi $(1,0,-1)$ è un autovettore di autovalore $1-a$.

(b) Per verificare che $a+2$ è un autovalore basta controllare che la matrice $A-(a+2)I$ non ha rango massimo. Si ha

$$A-(a+2)I = \begin{bmatrix} -a-1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -a-1 \end{bmatrix}$$

e osserviamo che questa matrice non ha rango massimo in quanto la somma delle prime 2 righe è uguale all'opposto della terza.

(c) e (d) Calcoliamo l'autospazio dell'autovalore $a+2$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-(a+2)I$: otteniamo l'autovettore $(1,1,1)$. I 3 autovettori che abbiamo a disposizione, $(1,-2,1)$, $(1,0,-1)$ e $(1,1,1)$ sono indipendenti e quindi A è diagonalizzabile per ogni vlaore di a. I rispettivi autovalori, $a-1$, $1-a$ e $a+2$ sono sempre distinti tranne per $a=1$ e per $a=-1/2$, ma abbiamo già verificato che A rimane diagonalizzabile anche in questi casi in cui compaiono autovalori con molteplicità maggiore di 1.