ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA
ANNO 2006/2007

01/03/07

(1) Ridurre la seguente matrice ad una a scala ridotta utilizzando il metodo di Gauss-Jordan
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Soluzione.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Determinare quante e quali sono le matrici a scala ridotta equivalenti per righe ad una matrice del tipo
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2+t & 1+t \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.
Soluzione. C'è un'unica matrice a scala ridotta equivalente ad una del tipo dato ed è:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Verificare che $A^3 - 5A^2 + 5A + 13I_3 = 0$. Senza usare l'algoritmo di Gauss-Jordan, stabilire se la matrice A è invertibile e in caso affermativo calcolarne l'inversa. *Soluzione.* Si ha $A(A^2 - 5A + 5) = -13I$ e quindi $A(A^2 - 5A + 5)(-\frac{1}{13}I) = I$. Ne duduciamo che $A^{-1} = (A^2 - 5A + 5)(-\frac{1}{13}I)$.

(4) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che una potenza di A abbia una riga nulla. Dimostrare che la matrice A non è invertibile. *Soluzione.* Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che A^k ha una riga nulla. Ne segue che A^k non ha rango massimo e pertanto non è invertibile. Supponiamo per assurdo che A sia invertibile e sia B la sua inversa. Allora $A^k B^k = A^{k-1} A B B^{k-1} = A^{k-1} B^{k-1}$. Reiterando questo calcolo $k-1$ volte otteniamo $A^k B^k = AB = I$. Ne segue che B^k è l'inversa di A^k contro la nostra precedente deduzione che A^k non è invertibile.

(5) Utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan, determinare l'inversa delle seguenti matrici A e B:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{9}{2} & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -8 & -\frac{37}{4} & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & \frac{19}{2} & \frac{15}{2} \\ -3 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 8 & 12 & -4 \\ \frac{37}{2} & \frac{107}{4} & -9 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

06/03/07

(1) Si calcoli il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

*Soluzione.*Si ha $\det A = -66$.

(2) Calcolare il determinante della seguente matrice utilizzando la definizione del determinante con le permutazioni e la regola di Laplace.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) Si determini per quali valori del parametro reale t la seguente matrice risulta invertibile.

$$\begin{pmatrix} 25 & 9 & 4 \\ t^2 & t & t^2+t \\ 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il determinante della matrice è $-24t(8t-5)$. Siccome una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero concludiamo che gli unici valori da escludere sono $t = 0$ e $t = -\frac{5}{8}$.

(4) Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo al variare del parametro reale t

$$\begin{cases} x & +ty & +tz & = 0 \\ -x & +y & -z & = 0 \\ x & & +2z & = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Il sistema ammette solo la soluzione banale per ogni valore del parametro t in quanto la matrice coefficienti ha sempre determinante uguale a 2.

13/03/2007

(1) Si calcoli il determinante della seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 17 & 20 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Per calcolare $\det B$ conviene scambiare la prima colonna con la terza colonna e poi procedere con l'algoritmo di Gauss per righe. Si otterrà facilmente $\det B = 198$.

(2) Sapendo che $\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, calcolare i seguenti determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} x & 3x+3 & x+1 \\ y & 3y & y+1 \\ z & 3z+2 & z+1 \end{pmatrix}$$

(3) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia X una matrice 3×3 soddisfacente la seguente equazione matriciale: $AX = B$. Si calcoli $\det X$.

(4) Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} kx & +2y & -z & = 0 \\ 2x & +(k+2)y & +2z & = 0 \\ 2(k+2)x & +2(k+3)y & +(k+3)z & = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti converrà dapprima semplificarla. Ad esempio si può sottrarre dalla terza riga 2 volte la prima e 2 volte la seconda. In questo modo la matrice si semplifica notevolmente e si può calcolare il determinante con la regola di Laplace ottenendo $k(k+1)(k+2)$. Quindi per $k \neq 0, -1, -2$ il sistema ammette solo la soluzione banale. Negli altri casi si avranno infinite soluzioni che vanno calcolate caso per caso.

(5) Determinare per quale valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango.

Soluzione. La matrice A ha al più rango uguale a 3. Per i valori di k per cui $\det B \neq 0$ avremo $rango(B) = 4 \neq rango(A)$. Calcoliamo quindi il determinante di B (utilizzando ad esempio il metodo di Laplace rispetto alla seconda riga). Otteniamo $\det B = 9(k-2)$ e quindi se $k \neq 2$ abbiamo $rango(A) \neq rango(B)$. Se $k = 2$ osserviamo che la quarta colonna di B combinazione lineare delle altre (2I-II+2III) e quindi la possiamo annullare. La matrice rimanente è uguale alla matrice A con l'aggiunta di una colonna di zeri ed avrà pertanto lo stesso rango di A.

17/04/2007

(1) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio $W \subset M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1)$ e $\mathbf{w}_2 = (0,1,0,-1)$. Determinare una base per $U + W$ e $U \cap W$.

(4) In $\mathbb{R}^4$ di considerino il sottospazio $U = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ ed il sottospazio $W = \text{Span}(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_3)$. Trovare le dimensioni di $U, W, U+W, U \cap W$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5) Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^6$

$$S = \{(1,2,3,4,5,6), (1,1,2,1,1,2), (0,1,2,1,3,-4)\}$$

Verificare che S è linearmente indipendente e completare S ad una base di $\mathbb{R}^6$.

(6) Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V := \{(h-k, h+k, h, k) | h, k \in \mathbb{R}\};$$

determinare un sottospazio di U di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.

(7) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti da un parametro reale k.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

determinare per quali valori di k i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.
Per tali valori esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.
Per i valori di k per cui non formano una base esprimere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ con coefficienti non tutti nulli.

09/04/2008

(1) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue in $\mathbb{R}_+$. Sia

$$W = Span\{\log x, \log(x+1)\}.$$

Deterinare se $\log(\sqrt{(x+x^2)^3}) \in W$.

(2) Sia $V = \mathbb{R}_4[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di variabile reale di grado minore o uguale a 4. Sia

$$W = Span\{x^3 + x^2 + 1, x^3 - x, x + 1\}.$$

Determinare quali tra x, x^2 e x^3 appartengono a W.
Determinare inoltre le equazioni cartesiane di W.

(3) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(4) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio $W \subset M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1)$ e $\mathbf{w}_2 = (0,1,0,-1)$. Determinare una base per U, $U + W$ e $U \cap W$.

(6) In $\mathbb{R}^4$ di considerino il sottospazio $U = \mathrm{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ ed il sottospazio $W = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_3)$. Trovare le dimensioni di $U, W, U + W, U \cap W$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(7) Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^6$

$$S = \{(1,2,3,4,5,6), (1,1,2,1,1,2), (0,1,2,1,3,-4)\}$$

Verificare che S è linearmente indipendente e completare S ad una base di $\mathbb{R}^6$.

(8) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ dipendenti da un parametro reale k.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

determinare per quali valori di k i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.
Per tali valori esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.
Per i valori di k per cui non formano una base esprimere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ con coefficienti non tutti nulli.

24/04/2007

(1) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} k \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ formano una base di $\mathbb{R}^2$? In corrispondenza a tali valori esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

(3) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+k \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+k \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, ed U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare una base dei sottospazi U, W, $U+W$ e $U \cap W$ al variare del parametro reale k.

08/05/2007

(1) Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

data da $f(x,y,z) = (y-z, x, x+y-z, 2x+y-z)$.
(i) Determinare nucleo ed immagine di f
(ii)Determinare una base del sottospazio $f(U)$ di $\mathbb{R}^4$, dove U è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x-y-z=0$.

(2) Si considerino i seguenti endomorfismi di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (z, x, x-z) \\ g(x,y,z) &= (y+x, y-x, 0) \end{aligned}$$

(i) Determinare una base per Ker f ed una base per Ker g;
(ii)Determinare equazioni cartesiane per i sottospazi Im f e Im g;
(iii) Determinare i sottospazi Ker $f \cap$ Ker g, Ker $f +$ Ker g, Im $f \cap$ Im g, e Im $f +$ Im g.

(3) Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+\lambda y, x-\lambda z, y+z).$$

Per quali valori del parametro λ l'endomorfismo f risulta essere un automorfismo? Per i valori di λ per cui f non è un automorfismo determinare equazioni parametriche e cartesiane di Ker f e Im f.

(4) Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,1) = (2,1)$ e $f(1,0) = (-1,1)$. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

(5) Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+z, x-2z, y-z),$$

e l'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare le matrici $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ e $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

15/05/2007

(1) Si consideri la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,1) = (2,1)$ e $f(1,0) = (-1,1)$. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

(2) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$. Determinare la matrice del cambio di base da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{B}$.

(3) Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+z, x-2z, y-z),$$

e l'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare le matrici $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(f)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(4) Si considerino le trasformazioni lineari

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3,\\ g:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

tali che $f(x,y,z) = (x, 2x-2y-2z, -3x+z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $g(1,0,0) = (1,1)$, $g(0,1,1) = (1,0)$, $g(0,1,0) = (1,1)$. Determinare la trasformazione $h = g \circ f$.

(5) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,2,3) = (1,0,1)$, $f(1,1,1) = (-1,1,2)$, $f(2,3,3) = (7,-6-11)$.
Determinare f, $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.

(6) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$una sua base. Si consideri lunico endomorfismo di V tale che

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 2b_2 + 3b_3\\ f(b_1) &= 2b_1 - 5b_2 - 8b_3\\ f(b_1) &= -b_1 + 4b_2 + 6b_3. \end{aligned}$$

Determinare l'endomorfismo f^2.
Verificare che $V = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$.

22/05/2007

(1) Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4\\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che A è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

e determinare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.
Determinare tutte le matrici P che soddisfano l' identità $A = P^{-1}DP$.

(2) Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x, 2x-2y-2z, 2x-3y-z).$$

Determinare se possibile una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.
Determinare una matrice invertibile P tale che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = P^{-1} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) P$

(3) Determinare gli autospazi dell'endomorfismo lineare f di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$f(0,1,1) = (0,2,2),\ f(1,0,1) = (2,2,4),\ f(1,1,0) = (1,2,1)$$

(4) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(1,-1,0) = (2,-2,0)$, $f(1,0,1) = (2,-3,-1)$, $f(0,1,-1) = (-6,5,1)$. Sia A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Determinare tutte le matrici diagonali simili ad A.

(5) Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autospazi della matrice A. A è diagonalizzabile?