

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

- 1) Siano  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  vettori linearmente dipendenti. Allora
- ☒ **V** a) la matrice che ha  $v_i$  come  $i$ -esima riga, per  $i = 1, \dots, k$ , ha rango  $k$ .
  - ☒ **V** b)  $\{v_1, \dots, v_k\}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ .
  - ☒ **F** ☒ c)  $\dim(L(v_1, \dots, v_k)) < k$ .
  - ☒ **V** d) almeno uno tra  $v_1, \dots, v_k$  è il vettore nullo.
- 2) Sia  $T : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare iniettiva.
- ☒ **V** a) Allora  $T$  è suriettiva.
  - ☒ **F** ☒ b) Allora  $\dim V \leq \dim W$ .
  - ☒ **V** c) Allora esiste un vettore di  $V$  non nullo che ha come immagine  $0_W$ .
  - ☒ **F** ☒ d) Se  $T(v) = T(w)$  allora  $v = w$ .
- 3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato, sia  $T : V \rightarrow V$  un endomorfismo e siano  $A$  e  $B$  matrici associate a  $T$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  di  $V$ .
- ☒ **F** ☒ a) Allora  $A$  e  $B$  sono simili.
  - ☒ **F** ☒ b) Allora  $\rho(A) = \rho(B)$ .
  - ☒ **F** ☒ c) Se  $v \cong_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$  allora  $T(v) \cong_{\mathcal{B}} A \cdot {}^t(x_1, \dots, x_n)$ .
  - ☒ **F** ☒ d) Allora  $B$  è quadrata.
- 4) Siano  $S = (A, \mathbf{b})$  e  $S' = (A', \mathbf{b}')$  due sistemi equivalenti (cioè aventi le stesse soluzioni) e siano  $C$  e  $C'$  le matrici complete di, rispettivamente,  $S$  e  $S'$ . Allora
- ☒ **V** a)  $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$ .
  - ☒ **F** ☒ b)  $\rho(C) = \rho(C')$ .
  - ☒ **V** c) se  $S$  è di Cramer anche  $S'$  lo è.
  - ☒ **V** d)  $S$  e  $S'$  hanno lo stesso numero di equazioni.
- 5) Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Allora
- ☒ **F** ☒ a) 0 è autovalore di  $A$ .
  - ☒ **F** ☒ b)  $(1, 1)$  è autovettore di  $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $T_A(x, y) = A \cdot {}^t(x, y)$ .
  - ☒ **F** ☒ c)  $A$  è diagonalizzabile per similitudine.
  - ☒ **V** d)  $A$  è simile alla matrice identità.
- 6) Sia  $\mathcal{E}$  uno spazio euclideo e siano  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{T}$  due sottospazi paralleli di dimensione  $k$ .
- ☒ **F** ☒ a) Allora la giacitura di  $\mathcal{H}$  contiene  $k$  vettori linearmente indipendenti.
  - ☒ **F** ☒ b) Allora  $\mathcal{H}$  contiene  $k$  punti affinementemente indipendenti.
  - ☒ **F** ☒ c) Se  $v$  appartiene alla giacitura di  $\mathcal{H}$  allora  $v$  appartiene alla giacitura di  $\mathcal{T}$ .
  - ☒ **F** ☒ d) Se  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{T}$  hanno un punto in comune allora  $\mathcal{H} = \mathcal{T}$ .

7) Sia  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  tale che  $\det A = 1$ . Allora

~~F~~ ~~X~~ a)  $\det A^{-1} = 1$ .

~~F~~ ~~X~~ b)  $\det A^2 = 1$ .

~~F~~ ~~X~~ c)  $\det {}^tA = 1$ .

~~X~~ ~~V~~ d)  $A$  è la matrice identità.

8) Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  un prodotto scalare. Allora

~~X~~ ~~V~~ a)  $\langle v, w \rangle \geq 0$ , per ogni  $v, w \in V$ .

~~F~~ ~~X~~ b)  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ , per ogni  $v, w \in V$ .

~~F~~ ~~X~~ c)  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , per ogni  $v \in V$ .

~~F~~ ~~X~~ d)  $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ , per ogni  $v, w, u \in V$ .

9) Sia  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  una matrice definita positiva. Allora

~~X~~ ~~V~~ a) tutti i minori di  $A$  hanno determinante positivo.

~~F~~ ~~X~~ b) tutti gli elementi sulla diagonale principale di  $A$  sono positivi.

~~F~~ ~~X~~ c) tutti gli autovalori di  $A$  sono positivi.

~~X~~ ~~V~~ d) tutti gli elementi di  $A$  sono positivi.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Sia  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  tale che  $\det A = 1$ . Allora

- F ☒ a)  $\det A^{-1} = 1$ .  
 F ☒ b)  $\det A^2 = 1$ .  
 F ☒ c)  $\det {}^tA = 1$ .  
☒ V d)  $A$  è la matrice identità.

2) Sia  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  una matrice definita positiva. Allora

- ☒ V a) tutti i minori di  $A$  hanno determinante positivo.  
 F ☒ b) tutti gli elementi sulla diagonale principale di  $A$  sono positivi.  
 F ☒ c) tutti gli autovalori di  $A$  sono positivi.  
☒ V d) tutti gli elementi di  $A$  sono positivi.

3) Sia  $\mathcal{E}$  uno spazio euclideo e siano  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{T}$  due sottospazi paralleli di dimensione  $k$ .

- F ☒ a) Allora la giacitura di  $\mathcal{H}$  contiene  $k$  vettori linearmente indipendenti.  
 F ☒ b) Allora  $\mathcal{H}$  contiene  $k$  punti affinementemente indipendenti.  
 F ☒ c) Se  $v$  appartiene alla giacitura di  $\mathcal{H}$  allora  $v$  appartiene alla giacitura di  $\mathcal{T}$ .  
 F ☒ d) Se  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{T}$  hanno un punto in comune allora  $\mathcal{H} = \mathcal{T}$ .

4) Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  un prodotto scalare. Allora

- ☒ V a)  $\langle v, w \rangle \geq 0$ , per ogni  $v, w \in V$ .  
 F ☒ b)  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ , per ogni  $v, w \in V$ .  
 F ☒ c)  $\langle v, v \rangle \geq 0$ , per ogni  $v \in V$ .  
 F ☒ d)  $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ , per ogni  $v, w, u \in V$ .

5) Siano  $v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}^n$  vettori linearmente dipendenti. Allora

- ☒ V a) la matrice che ha  $v_i$  come  $i$ -esima riga, per  $i = 1, \dots, k$ , ha rango  $k$ .  
☒ V b)  $\{v_1, \dots, v_k\}$  è una base di  $\mathbf{R}^n$ .  
 F ☒ c)  $\dim(L(v_1, \dots, v_k)) < k$ .  
☒ V d) almeno uno tra  $v_1, \dots, v_k$  è il vettore nullo.

6) Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Allora

- F ☒ a) 0 è autovalore di  $A$ .  
 F ☒ b)  $(1, 1)$  è autovettore di  $T_A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da  $T_A(x, y) = A \cdot {}^t(x, y)$ .  
 F ☒ c)  $A$  è diagonalizzabile per similitudine.  
☒ V d)  $A$  è simile alla matrice identità.

7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale finitamente generato, sia  $T : V \rightarrow V$  un endomorfismo e siano  $A$  e  $B$  matrici associate a  $T$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  di  $V$ .

- F ~~X~~ a) Allora  $A$  e  $B$  sono simili.  
F ~~X~~ b) Allora  $\rho(A) = \rho(B)$ .  
F ~~X~~ c) Se  $v \cong_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$  allora  $T(v) \cong_{\mathcal{B}} A \cdot {}^t(x_1, \dots, x_n)$ .  
F ~~X~~ d) Allora  $B$  è quadrata.

8) Sia  $T : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare iniettiva.

- ~~X~~ V a) Allora  $T$  è suriettiva.  
F ~~X~~ b) Allora  $\dim V \leq \dim W$ .  
~~X~~ V c) Allora esiste un vettore di  $V$  non nullo che ha come immagine  $0_W$ .  
F ~~X~~ d) Se  $T(v) = T(w)$  allora  $v = w$ .

9) Siano  $S = (A, \mathbf{b})$  e  $S' = (A', \mathbf{b}')$  due sistemi equivalenti (cioè aventi le stesse soluzioni) e siano  $C$  e  $C'$  le matrici complete di, rispettivamente,  $S$  e  $S'$ . Allora

- ~~X~~ V a)  $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$ .  
F ~~X~~ b)  $\rho(C) = \rho(C')$ .  
~~X~~ V c) se  $S$  è di Cramer anche  $S'$  lo è.  
~~X~~ V d)  $S$  e  $S'$  hanno lo stesso numero di equazioni.

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

1) In  $\mathbb{R}^3$  si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} (k+1)x + 2y + (k+1)z = 2 \\ x + (3+k)y + 4z = 3 + k^2 \end{cases}$$

- a) Si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$ , le rette  $r$  e  $s$  sono parallele. (3 punti)  
 b) Fissato  $k = 1$ , si determini l'equazione del piano che contiene sia  $r$  che  $s$ . (4 punti)  
 c) Fissato  $k = -1$ , si determini la distanza tra  $r$  ed  $s$ . (5 punti)

2) Sia  $T: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la trasformazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b + c - d, 0, -a + b - c + d).$$

- a) Si determini una base e la dimensione di  $\ker T$ . (3 punti)  
 b) Si determini una base di  $\text{Im} T$  e la si completi ad una base di  $\mathbb{R}^3$ . (3 punti)

① a)  $r \cap s: \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 3z = 1 \\ (k+1)x + 2y + (k+1)z = 2 \\ x + (3+k)y + 4z = 3 + k^2 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ k+1 & 2 & k+1 & 2 \\ 1 & 3+k & 4 & 3+k^2 \end{array} \right)$

$\xrightarrow{\substack{A \\ C}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2k & 0 & 2k \\ 0 & k+1 & 3 & k^2+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{4 \leftarrow 4-2 \\ 2 \leftarrow 2-3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2k & 0 & 2k \\ 0 & k & 0 & k^2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{4 \leftarrow 4-2 \\ 3 \leftarrow 3-2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2k & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 2k^2-2 \end{array} \right)$

$\rho(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad r \parallel s \Leftrightarrow \rho(A) = 2 \Leftrightarrow \boxed{k = 0}$

b)  $k = 1 \quad \rho(A) = 3 = \rho(C) \text{ (vedi 1a)} \Rightarrow r \text{ e } s \text{ sono incidenti}$

$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{cases} y = 1 \\ 3z = 1 - y \rightarrow z = 0 \\ x = 2 - 2y - z = 0 \end{cases} \quad P = (0, 1, 0) \quad r \cap s = \{P\}$

$Q = (5, -2, 1) \in r \quad S = (0, 0, 1) \in s$

$x(-3+1) - (y-1)(5) + z(-5) = 0$

$\boxed{-2x - 5y - 5z + 5 = 0}$

$\begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ y-1 & -3 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{matrix} \underline{x-P} & \underline{PQ} & \underline{PS} \end{matrix}$

c)  $K = -1$   $Q(A) = 3$   $P(U) = 4$  (primär 201  $\Rightarrow$  red. symmetrie)

$$\alpha(x+2y+z-2) + \beta(y+3z-1) = 0 \quad \text{coeff. direttori di } s$$

fascio piani per il

cerco quello // a s ( $\pi$ )

$$dx + y(2\alpha + \beta) + z(\alpha + 3\beta) = 0$$

$$-4\alpha + \alpha + 3\beta = 0 \quad \alpha = \beta = 1$$

$$x + 3y + 4z - 3 = 0 \quad P = (-2, 1, 1) \in S$$

$$d(r,s) = d(P,\pi) = \frac{|1-2+3+4-3|}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{26}}$$

2a)  $\ker T: \begin{cases} a-b+c-d=0 \\ 0=0 \\ -a+b-c+d=0 \end{cases}$

$$a - b + c - d = 0$$

$$\begin{cases} c = \alpha \\ d = \beta \\ b = \gamma \end{cases}$$

$$\alpha = 0 = \beta, \gamma = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha=1, \beta=\gamma=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \gamma = 0, \beta = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

una base di  $\ker T$  è  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \dim \ker T = 3$$

$$b) \dim M_2(\mathbb{R}) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 4 - 3 = 1$$

$$\text{Im } T = L\left(T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = L(1, 0, -1) \Rightarrow \text{base di } \text{Im } T \text{ e } \boxed{\{(1, 0, -1)\}}$$

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \boxed{\{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ base of } \mathbb{R}^3}$$

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

1) In  $\mathbb{R}^3$  si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} kx + y + kz = 1 \\ x + (1+k)y + 2z = 2 + k^2 \end{cases}$$

- Si dica per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$ , le rette  $r$  e  $s$  sono parallele. (3 punti)
- Fissato  $k = 0$ , si determini l'equazione del piano che contiene sia  $r$  che  $s$ . (4 punti)
- Fissato  $k = -1$ , si determini la distanza tra  $r$  ed  $s$ . (5 punti)

2) Sia  $T: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la trasformazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c + d, 2a + 2b + 2c + 2d, 0).$$

- Si determini una base e la dimensione di  $\ker T$ . (3 punti)
- Si determini una base di  $\text{Im} T$  e la si completi ad una base di  $\mathbb{R}^3$ . (3 punti)

1a)  $r \cap s: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ kx + y + kz = 1 \\ x + (1+k)y + 2z = 2 + k^2 \end{cases} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & k & 1 \\ 1 & 1+k & 2 & 2+k^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{a}^3 \leftarrow \text{a}^1 - \text{a}^3 \\ \text{a}^4 \leftarrow \text{a}^4 - \text{a}^1 \end{array}$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 1 & k^2+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a}^4 \leftarrow \text{a}^4 - \text{a}^2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & k-1 & 0 & k^2-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{a}^4 \leftarrow \text{a}^4 - \text{a}^3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k \end{array} \right)$$

$r \parallel s \Leftrightarrow \rho(A) = 2 \Leftrightarrow \boxed{k = 1}$   $\rho(A) = \begin{cases} 3 & k \neq 1 \\ 2 & k = 1 \end{cases}$

b)  $k = 0$   $\rho(A) = \rho(C) = 3$   $r$  e  $s$  incidenti (punto 1a)

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 2 - y = 1 \\ x = -y - z + 1 = -1 \end{cases} \rightarrow r \cap s = \{(-1, 1, 1)\} = P \quad Q = (-1, 2, 0) \in r$$

$S = (-1, 1, 0)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\underline{x-Q} \quad \underline{Q-P} \quad \underline{Q-S}$

$(x+1)(+1) - (y-2)(-2) + z(2) = 0 \quad \boxed{x + 2y + 2z - 3 = 0}$

