12 Giugno 2012 **I appello: versione 1** **N. Matr.**........................

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Si consideri la matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 3 & -3-\gamma & 0 \\ -3-\gamma & 4+4\gamma & \gamma+1 \\ 0 & \gamma+1 & \gamma+1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita positiva. *(2 punti)*

b) Fissato $\gamma = 1$ sia $\langle\ ,\ \rangle_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_A = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot\ {}^t(y_1, y_2, y_3)$$

e sia $U = L((0,0,1))$. Si determini una rappresentazione cartesiana minimale ed una base per ${}^\perp U$. *(2 punti)*

c) Sia C_γ la conica che ha γ come discriminante. Si classifichi C_γ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$. *(2 punti)*

d) Fissato $\gamma = 0$, si determini una matrice diagonale simile ad A e la forma canonica per congruenza di A. *(3 punti)*

2) Sia dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z

$$S : \begin{cases} x + 4y - z = -9 \\ 2y + z = -1 \\ x + 2y + \delta z = 0 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$$

a) Si discuta il sistema al variare di $\delta \in \mathbb{R}$ (cioè si determini per quali valori di δ il sistema è indeterminato, per quali è impossibile e per quali è determinato). *(3 punti)*

b) Fissato $\delta = -2$, si calcoli una base $\mathcal{B}$ per $\mathrm{Sol}(S_0)$, lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad S. *(3 punti)*

c) Si completi la base $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ e si scriva un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker T = \mathrm{Sol}(S_0)$ e $\mathrm{Im}(T) = L((1,1,1,1),(0,1,0,0))$ (suggerimento: è sufficiente assegnare le immagini dei vettori di $\mathcal{C}$). *(3 punti)*

---

12 Giugno 2012 **I appello: versione 2** **N. Matr.** ....

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Sia dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z

$$S : \begin{cases} x + 4y - z = -9 \\ 2y + z = -1 \\ x + 2y + \delta z = 0 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$$

a) Si discuta il sistema al variare di $\delta \in \mathbb{R}$ (cioè si determini per quali valori di δ il sistema è indeterminato, per quali è impossibile e per quali è determinato). *(3 punti)*

b) Fissato $\delta = -2$, si calcoli una base $\mathcal{B}$ per $\mathrm{Sol}(S_0)$, lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad S. *(3 punti)*

c) Si completi la base $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ e si scriva un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker T = \mathrm{Sol}(S_0)$ e $\mathrm{Im}(T) = L((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0))$ (suggerimento: è sufficiente assegnare le immagini dei vettori di $\mathcal{C}$). *(3 punti)*

2) Si consideri la matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 3 & -3-\gamma & 0 \\ -3-\gamma & 4+4\gamma & \gamma+1 \\ 0 & \gamma+1 & \gamma+1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita positiva. *(2 punti)*

b) Fissato $\gamma = 1$ sia $\langle \ , \ \rangle_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_A = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot {}^t(y_1, y_2, y_3)$$

e sia $U = L((0, 0, 1))$. Si determini una rappresentazione cartesiana minimale ed una base per ${}^\perp U$. *(2 punti)*

c) Sia C_γ la conica che ha γ come discriminante. Si classifichi C_γ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$. *(2 punti)*

d) Fissato $\gamma = 0$, si determini una matrice diagonale simile ad A e la forma canonica per congruenza di A. *(3 punti)*
