25 Giugno 2012 Versione 1 **N. Matr.** ....

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+6z+3t & x+3y+5z+t \\ -x-2z-t & x+2z+t \end{pmatrix}.$$

a) Si determini la matrice A associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

(2 punti)

b) Si determini una base per $\ker T$ e una rappresentazione cartesiana minimale per $\operatorname{Im} T$. *(4 punti)*

c) Si determini una base per il complemento ortogonale di $\operatorname{Im} T$, rispetto al prodotto scalare standard. *(2 punti)*

d) Sia trovino gli autovalori di T. *(3 punti)*

e) Si dica se esiste una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ spettrale per T e in caso affermativo si trovino una matrice E e una matrice D diagonale tali che $D = E^{-1}AE$. *(3 punti)*

2) In $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2t \\ z = 4 - 7t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Si determini il piano π perpendicolare a r e passante per il punto $P = (0, 1, 0)$. *(2 punti)*

b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano π' passante per r e per il punto $Q = (1, -2, 1)$. *(2 punti)*

---

25 Giugno 2012 Versione 2 **N. Matr.** ....

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y+2t & x-2y+t \\ 3x-5y+z+3t & -2x+4y+-2t \end{pmatrix}.$$

a) Si determini la matrice A associata a T rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(2 punti)

b) Si determini una base per $\ker T$ e una rappresentazione cartesiana minimale per $\operatorname{Im} T$. *(4 punti)*

c) Si determini una base per il complemento ortogonale di $\operatorname{Im} T$, rispetto al prodotto scalare standard. *(2 punti)*

d) Sia trovino gli autovalori di T. *(3 punti)*

e) Si dica se esiste una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ spettrale per T e in caso affermativo si trovino una matrice E e una matrice D diagonale tali che $D = E^{-1}AE$. *(3 punti)*

2) In $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1-t \\ z = -3+4t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Si determini il piano π perpendicolare a r e passante per il punto $P = (0,0,1)$. *(2 punti)*

b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano π' passante per r e per il punto $Q = (2,0,-1)$. *(2 punti)*
