

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

Data la seguente matrice a coefficienti in  $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

sia  $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo definito da  $T_A(x, y, z) = A \cdot {}^t(x, y, z)$ .

- a) Si dica per quali valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $T_A$  è biunivoco. (3 punti)
  - b) Si dica per quali valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  la segnatura di  $A$  è  $(0, 3)$ . (3 punti)
  - c) Fissato  $\lambda = 1$ , si determini  $T_A^{-1}(1, 1, 1)$ . (2 punti)
  - d) Fissato  $\lambda = 0$ , si calcoli una rappresentazione parametrica per  $\text{Im}T_A$ . (1 punto)
  - e) Fissato  $\lambda = 0$ , si determini una base di  $\mathbb{R}^3$  ortonormale e spettrale rispetto a  $T_A$ . (6 punti)
  - f) Fissato  $\lambda = -1$ , sia  $\pi$  il piano passante per i punti  $P = (3, 1, 3)$ ,  $Q = (1, 1, 1)$  e  $R = (0, 0, 1)$ . Si calcoli una rappresentazione cartesiana per  $T_A(\pi)$  (l'immagine del piano  $\pi$  tramite  $T_A$ ). (3 punti)
-

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

Data la seguente matrice a coefficienti in  $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

sia  $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo definito da  $T_A(x, y, z) = A \cdot {}^t(x, y, z)$ .

- a) Si dica per quali valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $T_A$  è biunivoco. (3 punti)
  - b) Si dica per quali valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  la segnatura di  $A$  è  $(0, 3)$ . (3 punti)
  - c) Fissato  $\lambda = 2$ , sia determini  $T_A^{-1}(1, 1, 1)$ . (2 punti)
  - d) Fissato  $\lambda = 0$ , si calcoli una rappresentazione parametrica per  $\text{Im}T_A$ . (1 punto)
  - e) Fissato  $\lambda = 0$ , si determini una base di  $\mathbb{R}^3$  ortonormale e spettrale rispetto a  $T_A$ . (6 punti)
  - f) Fissato  $\lambda = -1$ , sia  $\pi$  il piano passante per i punti  $P = (3, 1, 3)$ ,  $Q = (1, 1, 1)$  e  $R = (0, 0, 1)$ . Si calcoli una rappresentazione cartesiana per  $T_A(\pi)$  (l'immagine del piano  $\pi$  tramite  $T_A$ ). (3 punti)
-