Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* $1/2$ *punto se l'indicazione è esatta,* $-1/2$ *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ una matrice di rango r con $r < n$. Allora

F V a) le sue righe sono una base di $\mathbf{K}^n$.
F V b) tutti i minori di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero.
F V c) ogni sistema che ha A come matrice dei coefficienti è indeterminato.
F V d) il rango di ${}^tA$ è r.

2) Siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V di dimensione 5.

F V a) Se $v \in W_1$ allora $-\sqrt{34}\, v \in W_1$.
F V b) Se $W_1 \cap W_2$ contiene più di un vettore allora W_1 e W_2 sono dipendenti.
F V c) Se $\dim(W_1 + W_2) = 4$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
F V d) Se $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ allora $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$.

3) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi ordinate di uno spazio vettoriale di dimensione finita n e sia A la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

F V a) Allora A è invertibile.
F V b) Se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\mathcal{C} = (-v_1, \ldots, -v_n)$ allora $A = -I_n$.
F V c) Allora A ha determinante uguale a 1.
F V d) Le colonne di A sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{C}$.

4) Sia $S = (A, \mathbf{b})$ un qualunque sistema lineare impossibile e sia C la matrice completa. Allora

F V a) S rappresenta un sottospazio affine.
F V b) C è quadrata.
F V c) la dimensione dello spazio generato dalle righe di A è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle righe di C.
F V d) la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle colonne di C.

5) Una conica non degenere è un iperbole se

F V a) ha due assi di simmetria.
F V b) è una conica a centro.
F V c) ha due vertici.
F V d) ha supporto non vuoto.

6) Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo e sia $\mathcal{H}$ un sottospazio di dimensione almeno uno. Allora $\mathcal{H}$ è una retta se

F **V** a) la dimensione della giacitura di $\mathcal{H}$ è uno.

F **V** b) due vettori liberi qualsiasi nella giacitura di $\mathcal{H}$ sono linearmente dipendenti.

F **V** c) la giacitura di $\mathcal{H}$ è il complemento ortogonale della giacitura di un iperpiano.

F **V** d) tre punti qualsiasi di $\mathcal{H}$ sono affinemente dipendenti.

7) La seguente applicazione è lineare.

F **V** a) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da $T(x, y) = (x + 1, y + 2, 0)$.

F **V** b) $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4$ definita da $T(A) = (a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2)$.

F **V** c) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$ definita da $T(p(t)) = (p(t))^2$.

F **V** d) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}$ definita da $T(p(t)) = 1$.

8) Sia $T : V \to V$ un endomorfismo.

F **V** a) Se T ha infiniti autovalori allora V non è finitamente generato.

F **V** b) Se $\lambda \in \mathbf{K}$ è un autovalore allora $m_g(\lambda) \leq \dim V$.

F **V** c) Se esiste $\lambda \in \mathbf{K}$ tale che $\dim(U_\lambda) \geq 1$ allora λ è un autovalore.

F **V** d) Se V è un **C**-spazio vettoriale finitamente generato allora T ha almeno un autovalore.

9) Sia $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica.

F **V** a) Allora φ è un prodotto scalare.

F **V** b) Se A e B sono matrici di Gram associate a φ allora sono congruenti.

F **V** c) Se $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ vale $\varphi(u + v, \alpha w) = \alpha\varphi(v, w) + \alpha\varphi(w, u)$.

F **V** d) Se φ è definita negativa allora $\varphi(v, v) < 0$ per ogni $v \in V$ con $v \neq 0_V$.

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi ordinate di uno spazio vettoriale di dimensione finita n e sia A la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

F V a) Allora A è invertibile.

F V b) Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{C} = (-v_1, \dots, -v_n)$ allora $A = -I_n$.

F V c) Allora A ha determinante uguale a 1.

F V d) Le colonne di A sono le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{C}$.

2) Sia $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica.

F V a) Allora φ è un prodotto scalare.

F V b) Se A e B sono matrici di Gram associate a φ allora sono congruenti.

F V c) Se $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ vale $\varphi(u + v, \alpha w) = \alpha\varphi(v, w) + \alpha\varphi(w, u)$.

F V d) Se φ è definita negativa allora $\varphi(v, v) < 0$ per ogni $v \in V$ con $v \neq 0_V$.

3) Siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale reale V di dimensione 5.

F V a) Se $v \in W_1$ allora $-\sqrt{34}\, v \in W_1$.

F V b) Se $W_1 \cap W_2$ contiene più di un vettore allora W_1 e W_2 sono dipendenti.

F V c) Se $\dim(W_1 + W_2) = 4$ allora $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

F V d) Se $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ allora $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$.

4) Una conica non degenere è un iperbole se

F V a) ha due assi di simmetria.

F V b) è una conica a centro.

F V c) ha due vertici.

F V d) ha supporto non vuoto.

5) Sia $T : V \to V$ un endomorfismo.

F V a) Se T ha infiniti autovalori allora V non è finitamente generato.

F V b) Se $\lambda \in \mathbf{K}$ è un autovalore allora $m_g(\lambda) \leq \dim V$.

F V c) Se esiste $\lambda \in \mathbf{K}$ tale che $\dim(U_\lambda) \geq 1$ allora λ è un autovalore.

F V d) Se V è un $\mathbf{C}$-spazio vettoriale finitamente generato allora T ha almeno un autovalore.

6) Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ una matrice di rango r con $r < n$. Allora

F V a) le sue righe sono una base di $\mathbf{K}^n$.

F V b) tutti i minori di A di ordine maggiore di r hanno determinante uguale a zero.

F V c) ogni sistema che ha A come matrice dei coefficienti è indeterminato.

F V d) il rango di ${}^tA$ è r.

7) Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo e sia $\mathcal{H}$ un sottospazio di dimensione almeno uno. Allora $\mathcal{H}$ è una retta se

F **V** a) la dimensione della giacitura di $\mathcal{H}$ è uno.

F **V** b) due vettori liberi qualsiasi nella giacitura di $\mathcal{H}$ sono linearmente dipendenti.

F **V** c) la giacitura di $\mathcal{H}$ è il complemento ortogonale della giacitura di un iperpiano.

F **V** d) tre punti qualsiasi di $\mathcal{H}$ sono affinemente dipendenti.

8) La seguente applicazione è lineare.

F **V** a) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da $T(x, y) = (x + 1, y + 2, 0)$.

F **V** b) $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4$ definita da $T(A) = (a^1_1, a^2_1, a^1_2, a^2_2)$.

F **V** c) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$ definita da $T(p(t)) = (p(t))^2$.

F **V** d) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}$ definita da $T(p(t)) = 1$.

9) Sia $S = (A, \mathbf{b})$ un qualunque sistema lineare impossibile e sia C la matrice completa. Allora

F **V** a) S rappresenta un sottospazio affine.

F **V** b) C è quadrata.

F **V** c) la dimensione dello spazio generato dalle righe di A è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle righe di C.

F **V** d) la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A è uguale alla dimensione dello spazio generato dalle colonne di C.