07 Settembre 2010 **Num. Matr.** 00101

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Sia $n \geq 2$. Ha determinante uguale a zero una qualsiasi matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

F V a) che sia non invertibile.

F V b) avente la prima riga uguale al doppio della seconda.

F V c) avente la somma delle colonne uguale al vettore nullo di $\mathbf{K}^n$.

F V d) per cui vale $A = B \cdot C$ con $\det(C) = 0$.

2) Due sistemi lineari S e S' sono equivalenti se

F V a) sono entrambi omogenei.

F V b) hanno lo stesso sistema omogeneo associato.

F V c) ogni soluzione di S verifica ogni equazione di S'.

F V d) la matrice completa di S è ottenuta dalla matrice completa di S' mediante trasformazioni elementari di riga.

3) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di uno spazio vettoriale reale V. Allora

F V a) $V = L(v_1) \oplus L(v_2, v_3, v_4)$.

F V b) V è isomorfo a $\mathbf{R}^4$.

F V c) L'insieme $X = \{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente.

F V d) $v_1 \neq 0_V$.

4) Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un endomorfismo che ha $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 62 & 64 \end{pmatrix}$ come matrice canonicamente associata. Allora

F V a) T è invertibile.

F V b) $(1, -1)$ è autovettore di T.

F V c) T è una trasformazione ortogonale.

F V d) $(1, 0) \in \ker T$.

5) Le seguenti equazioni rappresentano una retta in uno spazio affine reale di dimensione 4.

F V a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

F V b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

F V c) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 + \alpha \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

F V d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

6) Sia $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ una forma quadratica con segnatura $(2, 1)$. Allora

F V a) esiste una matrice associata a q regolare.
F V b) esiste $v \in \mathbf{R}^4$ tale che $q(v) < 0$.
F V c) q è un prodotto scalare.
F V d) una qualsiasi matrice associata a q ha almeno un autovalore positivo.

7) In uno spazio euclideo tridimensionale, siano π e τ due piani ortogonali tra loro. Allora

F V a) $\vec{\pi} \cap \vec{\tau} = \{(0, 0, 0)\}$.
F V b) ${}^{\perp}\vec{\pi} \subseteq \vec{\tau}$.
F V c) ogni retta contenuta nel piano π è ortogonale a τ.
F V d) esiste una retta contenuta nel piano π e ortogonale a τ.

8) Le matrici a coefficienti reali $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

F V a) sono simili e congruenti.
F V b) non sono nè simili nè congruenti.
F V c) sono congruenti, ma non simili.
F V d) sono simili, ma non congruenti.

9) In $\mathbf{R}^3$, il sottoinsieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

F V a) è un sottospazio affine.
F V b) è un sottospazio vettoriale.
F V c) contiene il punto $(1, 1, 1)$.
F V d) contiene l'asse x.

07 Settembre 2010 **Num. Matr.** 00110

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) In $\mathbf{R}^3$, il sottoinsieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

F V a) è un sottospazio affine.
F V b) è un sottospazio vettoriale.
F V c) contiene il punto $(1, 1, 1)$.
F V d) contiene l'asse x.

2) In uno spazio euclideo tridimensionale, siano π e τ due piani ortogonali tra loro. Allora

F V a) $\overrightarrow{\pi} \cap \overrightarrow{\tau} = \{(0, 0, 0)\}$.
F V b) $^{\perp}\overrightarrow{\pi} \subseteq \overrightarrow{\tau}$.
F V c) ogni retta contenuta nel piano π è ortogonale a τ.
F V d) esiste una retta contenuta nel piano π e ortogonale a τ.

3) Sia $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ una forma quadratica con segnatura $(2, 1)$. Allora

F V a) esiste una matrice associata a q regolare.
F V b) esiste $v \in \mathbf{R}^4$ tale che $q(v) < 0$.
F V c) q è un prodotto scalare.
F V d) una qualsiasi matrice associata a q ha almeno un autovalore positivo.

4) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di uno spazio vettoriale reale V. Allora

F V a) $V = L(v_1) \oplus L(v_2, v_3, v_4)$.
F V b) V è isomorfo a $\mathbf{R}^4$.
F V c) L'insieme $X = \{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente.
F V d) $v_1 \neq 0_V$.

5) Le matrici a coefficienti reali $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

F V a) sono simili e congruenti.
F V b) non sono nè simili nè congruenti.
F V c) sono congruenti, ma non simili.
F V d) sono simili, ma non congruenti.

6) Sia $n \geq 2$. Ha determinante uguale a zero una qualsiasi matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

F V a) che sia non invertibile.
F V b) avente la prima riga uguale al doppio della seconda.
F V c) avente la somma delle colonne uguale al vettore nullo di $\mathbf{K}^n$.
F V d) per cui vale $A = B \cdot C$ con $\det(C) = 0$.

7) Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un endomorfismo che ha $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 62 & 64 \end{pmatrix}$ come matrice canonicamente associata. Allora

F ~~V~~ a) T è invertibile.

F ~~V~~ b) $(1, -1)$ è autovettore di T.

~~F~~ V c) T è una trasformazione ortogonale.

~~F~~ V d) $(1, 0) \in \ker T$.

8) Due sistemi lineari S e S' sono equivalenti se

~~F~~ V a) sono entrambi omogenei.

~~F~~ V b) hanno lo stesso sistema omogeneo associato.

~~F~~ V c) ogni soluzione di S verifica ogni equazione di S'.

F ~~V~~ d) la matrice completa di S è ottenuta dalla matrice completa di S' mediante trasformazioni elementari di riga.

9) Le seguenti equazioni rappresentano una retta in uno spazio affine reale di dimensione 4.

F ~~V~~ a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

~~F~~ V b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

~~F~~ V c) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 + \alpha \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

~~F~~ V d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

07 Settembre 2010 **N. Matr.............................** (v2)

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

In $\mathbb{R}^3$ dati i vettori $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (-1, \lambda-2, -1)$, $v_4 = (2,2,\lambda+2)$ sia A la matrice la matrice che ha v_i come i-esima riga, per $i = 1,2,3,4$ e sia $B = {}^tA \cdot A$.

a) Si dica per quali valori di λ l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è ortogonale. Esistono dei valori per cui tale insieme è ortonormale? *(4 punti)*

b) Fissato $\lambda = 0$ si dica se la matrice B è definita. *(4 punti)*

c) Fissato $\lambda = 0$, sia $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che ha A come matrice canonicamente associata. Si determini $T_A^{-1}\{(1,0,0,2)\}$. *(3 punti)*

d) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ genera $\mathbb{R}^3$ e per quali valori è linearmente indipendente. *(4 punti)*

e) Si determinino equazioni cartesiane per il piano passante per i punti $(3,1,1)$ e $(1,0,1)$ e avente v_1 come vettore libero. *(3 punti)*

---

a)
$$\begin{cases} \langle v_1, v_2 \rangle = 1-1=0 \\ \langle v_1, v_3 \rangle = -1+\lambda-2-1 = \lambda-4 = 0 \iff \lambda = 4 \\ \langle v_2, v_3 \rangle = -1+1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\{v_1,v_2,v_3\} \text{ è ortogonale per } \lambda=4}$$

Dato che $\|v_1\| = \sqrt{1+1+1} = 3 \neq 1$ $\boxed{\text{l'insieme non è mai ortonormale}}$

---

b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 7 & 9 & 7 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7 > 0 \\ \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 63-49 = 14 > 0 \\ \det B = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 7 & 9 & 7 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -8+28 = 20 > 0 \\ b^3 \leftarrow b^3 - b^1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ per il criterio di Sylvester B è definita positiva $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{è definita}}$

---

c) $T_A^{-1}\{(1,0,0,2)\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{c^2 \leftarrow c^2 - c^1 \\ c^3 \leftarrow c^3 + c^1 \\ c^4 \leftarrow c^4 - 2c^1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{c^3 \leftarrow c^3 - c^2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2z = 2 \to z = 1 \\ y = -2z+1 \to y = -1 \\ x = 1-y-z \to x = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{T_A^{-1}\{(1,0,0,2)\} = \{(1,-1,1)\}}$$

d) $\dim L(v_1, v_2, v_3, v_4) = \rho(A)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A) = 2 \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+\lambda-2+\lambda-2+1=0 \\ -2+2+2-\lambda-2=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho(A) = 2, 3$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 0 \end{cases} \text{IMP.} \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \rho(A) = 3 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \dim L(v_1, v_2, v_3, v_4) \overset{\shortparallel}{\dim} \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \boxed{\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \text{ generano } \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

Dato che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ contiene di vettori maggiore della $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Longrightarrow$ <u>non esistono valori per cui sia linearmente indip.</u>

---

e) $w = (3,1,1) - (1,0,1) = (2,1,0) \in \overrightarrow{\pi}$

$$\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff \rho \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (x-1) - 2y + (z-1) = 0$$

equazione cartesiana di π e' $\boxed{x - 2y + z - 2 = 0}$