16 Luglio 2010 **Num. Matr.** 00110

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) In $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard si consideri la retta r avente come coefficienti direttori $(1, 1, 1)$ e passante per il punto $(2, -1, 3)$. Allora

F V a) il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ è ortogonale a r.

F V b) la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$ è parallela a r.

F V c) la retta r passa per il punto $(0, 0, 0)$.

F V d) la retta r è incidente al piano $x = 0$.

2) Siano $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ due soluzioni distinte di un sistema lineare S. Allora

F V a) S è indeterminato.

F V b) $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad S.

F V c) $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ è soluzione di S.

F V d) la matrice dei coefficienti e la matrice completa di S hanno lo stesso rango.

3) La seguente struttura algebrica con le usuali operazioni di somma e prodotto è un anello unitario

F V a) $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.

F V b) $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$.

F V c) $(P, +, \cdot)$, dove P denota l'insieme dei numeri interi pari.

F V d) $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$.

4) Il rango di una matrice è h se

F V a) tutti i suoi minori di ordine maggiore di h sono singolari.

F V b) possiede h colonne linearmente indipendenti.

F V c) è ridotta a gradini per righe e ha esattamente h righe non nulle.

F V d) lo spazio generato dalle righe ha dimensione h.

5) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $W \subseteq V$ un sottospazio.

F V a) Se $v \in V$ è ortogonale ai vettori di una base di W allora $v \in^{\perp} W$.

F V b) $^{\perp}(^{\perp}W) = W$.

F V c) Se V è finitamente generato allora $V =^{\perp} W \oplus W$.

F V d) Allora $^{\perp}V = \{0_V\}$.

6) Una matrice simmetrica di ordine n a coefficienti in $\mathbf{R}$ è definita negativa se

F V a) è congruente a $-I_n$.

F V b) ha rango massimo.

F V c) ha indice di positività uguale a zero.

F V d) ha determinante negativo.

7) Sia $T : V \to V$ un endomorfismo e siano $v, w \in V$ tali che $T(v) = T(w) = 2w$. Allora

F **V** a) T è semplice.

F **V** b) T ha solo l'autovalore 2.

F **V** c) v è autovettore relativo all'autovalore 2.

F **V** d) $v - w$ è autovettore relativo all'autovalore 0.

8) Le seguenti coppie di spazi vettoriali reali sono isomorfi

F **V** a) $\mathbf{C}$ e $\mathbf{R}^2$.

F **V** b) $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}_{\leq 5}[t]$.

F **V** c) $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}^4$.

F **V** d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0\}$ e $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0\}$.

9) In $\mathbf{R}^3$ si consideri il vettore $v = (-2, 2, -9)$ e la base ordinata $\mathcal{B} = ((2, 1, 1), (0, 0, 1), (0, -3, 9))$. Allora

F **V** a) $v \equiv_{\mathcal{B}} (-2, 2, -9)$.

F **V** b) esiste una base di $\mathbf{R}^3$ contenente v.

F **V** c) $v \in L((4, -4, 20), (1, 0, 0))$.

F **V** d) v è linearmente dipendente.

16 Luglio 2010 **Num. Matr.** 00101

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) La seguente struttura algebrica con le usuali operazioni di somma e prodotto è un anello unitario

F V a) $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.
F V b) $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$.
F V c) $(P, +, \cdot)$, dove P denota l'insieme dei numeri interi pari.
F V d) $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$.

2) Il rango di una matrice è h se

F V a) tutti i suoi minori di ordine maggiore di h sono singolari.
F V b) possiede esattamente h colonne linearmente indipendenti.
F V c) è ridotta a gradini per righe e ha esattamente h righe non nulle.
F V d) lo spazio generato dalle righe ha dimensione h.

3) Siano $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ due soluzioni distinte di un sistema lineare S. Allora

F V a) S è indeterminato.
F V b) $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad S.
F V c) $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ è soluzione di S.
F V d) la matrice dei coefficienti e la matrice completa di S hanno lo stesso rango.

4) In $\mathbf{R}^3$ si consideri il vettore $v = (-2, 2, -9)$ e la base ordinata $\mathcal{B} = ((2, 1, 1), (0, 0, 1), (0, -3, 9))$. Allora

F V a) $v \equiv_{\mathcal{B}} (-2, 2, -9)$.
F V b) esiste una base di $\mathbf{R}^3$ contenente v.
F V c) $v \in L((4, -4, 20), (1, 0, 0))$.
F V d) v è linearmente dipendente.

5) I seguenti spazi vettoriali reali sono isomorfi

F V a) $\mathbf{C}$ e $\mathbf{R}^2$.
F V b) $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}_{\leq 5}[t]$.
F V c) $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}^4$.
F V d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0\}$ e $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0\}$.

6) Sia $T : V \to V$ un endomorfismo e siano $v, w \in V$ due vettori distinti e non nulli tali che $T(v) = T(w) = 2w$. Allora

F V a) T è semplice.
F V b) T ha solo l'autovalore 2.
F V c) v è autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) $v - w$ è autovettore relativo all'autovalore 0.

7) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $W \subseteq V$ un sottospazio.

F ~~V~~ a) Se $v \in V$ è ortogonale ai vettori di una base di W allora $v \in^{\perp} W$.

F ~~V~~ b) $^{\perp}(^{\perp}W) = W$.

F ~~V~~ c) Se V è finitamente generato allora $V =^{\perp} W \oplus W$.

F ~~V~~ d) Allora $^{\perp}V = \{0_V\}$.

8) In $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard si consideri la retta r avente come coefficienti direttori $(1, 1, 1)$ e passante per il punto $(2, -1, 3)$. Allora

F ~~V~~ a) il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ è ortogonale a r.

F ~~V~~ b) la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$ è parallela a r.

~~F~~ V c) la retta r passa per il punto $(0, 0, 0)$.

F ~~V~~ d) la retta r è incidente al piano $x = 0$.

9) Una matrice simmetrica di ordine n a coefficienti in $\mathbf{R}$ è definita negativa se

F ~~V~~ a) è congruente a $-I_n$.

~~F~~ V b) ha rango massimo.

~~F~~ V c) ha indice di positività uguale a zero.

~~F~~ V d) ha determinante negativo.

16 Luglio 2010 **N. Matr.**............................ (v1)

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(3,1,1) = (6,2,2)$, $T(0,4,0) = (0,-4,0)$, $T(0,0,-1) = (0,-3,-2)$.

a) Si calcoli la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio. *(3 punti)*

b) Si determini una base spettrale di $\mathbb{R}^3$ relativa a T. *(4 punti)*

c) Sia $W = L((0,4,-1),(3,1,1))$. Si determini una rappresentazione cartesiana di $T(W)$. *(3 punti)*

2) In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard sia W il sottospazio vettoriale di equazioni catesiane
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

a) Si determini per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la dimensione di W è uno. *(2 punti)*

b) Fissato $\lambda = -1$ si trovi una base ortonormale per ${}^{\perp}W$. *(3 punti)*

c) Fissato $\lambda = 0$ si determinino equazioni parametriche del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ avente giacitura W e passante per il punto $P = (1,-1,5,1)$. *(3 punti)*

---

1) a) $(1,0,0) = a(3,1,1) + b(0,4,0) + c(0,0,-1)$

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 4b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/12 \\ c = +1/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow T(1,0,0) = \frac{1}{3}(6,2,2) - \frac{1}{12}(0,-4,0) + \frac{1}{3}(0,-3,-2)$
$= (2,0,0)$

$T(0,1,0) = \frac{1}{4}T(0,4,0) = \frac{1}{4}(0,-4,0) = (0,-1,0)$

$T(0,0,1) = -T(0,0,-1) = -(0,-3,-2) = (0,3,2)$

$$\boxed{M_{\tilde{\mathcal{B}}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Dato che $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(T)$ e' triangolare gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale cioe' -1 e 2. Inoltre dato che
$T(0,4,0) = -(0,4,0)$
$T(3,1,1) = 2(3,1,1)$
$T(1,0,0) = 2(1,0,0)$
$(0,4,0)$, $(3,1,1)$ e $(1,0,0)$ sono autovettori per T. Inoltre sono l.i. dato che
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4 \neq 0$$
$\Rightarrow$ formano una base per $\mathbb{R}^3$ (che ha dimensione 3)
Quindi una base spettrale e'
$\boxed{\{(0,4,0),(3,1,1),(1,0,0)\}}$

c) $T(W) = L(T(0,4,-1), T(3,1,1))$

$T(0,4,-1) = M_{\tilde{\mathcal{B}}}(T)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,-7,-2)$

$T(W) = L((0,-7,-2),(6,2,2))$ e $(0,-7,-2),(6,2,2)$ sono l.i. $\Rightarrow$ sono una base di $T(W)$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 6 \\ y & -7 & 2 \\ z & -2 & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = -10x - 12y + 42z = 0$$

$$\boxed{T(W): \ 5x + 6y - 21z = 0}$$

2) (a)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & \lambda & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\;2 \leftarrow a^2+a^1\;]{} \begin{pmatrix}- & - & - & -\\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(A)=\begin{cases}3 & \text{se } \lambda \neq -1\\ 2 & \text{se } \lambda=-1\end{cases} \Rightarrow \boxed{\dim W = 4-\rho(A)=1 \Leftrightarrow \lambda \neq -1}$$

(b) $^{\perp}W = L\big((1,1,1,-1),(0,0,1,1),(-1,-1,-1,1)\big) = L\big(\underbrace{(1,1,1,-1)}_{v_1},\underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2}\big)$

v_1 e v_2 sono l.i. $\Rightarrow \{v_1,v_2\}$ è una base di $^{\perp}W$.

$\langle v_1,v_2\rangle = 0 \Rightarrow$ sono ortogonali

$\|v_1\|=\sqrt{4}=2 \quad \|v_2\|=\sqrt{2}$

una base ortonormale per $^{\perp}W$ è $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$

(c)
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=0\\ -x_1-x_3+x_4=0\\ x_3+x_4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_4=\alpha\\ x_3=-x_4=-\alpha\\ x_1=x_4-x_3=2\alpha\\ x_2=-x_1-x_3+x_4=0\end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ il sottospazio affine cercato ha equazioni parametriche

$$\boxed{\begin{cases}x_1=1+2\alpha\\ x_2=-1\\ x_3=5-\alpha\\ x_4=1+\alpha\end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}}$$