Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) La struttura algebrica $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$

F V a) è un anello.
F V b) è un campo.
F V c) ha zero divisori.
F V d) ha infiniti elementi invertibili.

2) Sia (A, B) una coppia di matrici conformabili (cioè per cui definito il prodotto righe per colonne di A per B). Allora

F V a) la coppia $({}^tA, {}^tB)$ è conformabile.
F V b) la coppia $({}^tA, B)$ è conformabile.
F V c) il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.
F V d) la coppia (AB, B) è conformabile.

3) Siano A e C, rispettivamente, la matrice incompleta e completa di un sistema impossibile con 10 equazioni e 9 incognite. Allora

F V a) $\det(C) \neq 0$.
F V b) le righe di A sono linearmente dipendenti.
F V c) le colonne di A sono linearmente dipendenti.
F V d) $\rho(A) < \rho(C)$.

4) In uno spazio vettoriale reale V siano v_1, v_2, v_3 tre vettori distinti e sia $W = L(v_1, v_2, v_3)$. Allora

F V a) $v_1 - v_2 + \sqrt{2}v_3 \in W$.
F V b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di W.
F V c) $\{v_1 - v_2, v_2, v_3\}$ è un insieme di generatori per W.
F V d) $\{v_1, v_2, v_3, v_1 - v_2\}$ è un insieme di generatori per W.

5) Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare che ha $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ come matrice associata. Allora

F V a) T è iniettiva.
F V b) T è suriettiva.
F V c) $\dim V = 3$.
F V d) $\dim(\operatorname{Im} T) = 1$.

6) Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(3,1,1) = (6,2,2)$, $T(1,3,1) = (-1,-3,-1)$ e $T(-1,1,1) = (-2,2,2)$. Allora

F V a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V b) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V c) $(-3,-1,-1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) $\mathbf{R}^3$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) In $\mathbf{R}^5$ con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

F V a) Allora $\{(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,1)\}$ è una base di ${}^{\perp}U$.
F V b) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^{\perp}U \oplus U$.
F V c) Allora $\{(1,-1,0,-1,0)\} \in {}^{\perp}U$.
F V d) Se $v \in U$ e $w \in {}^{\perp}U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

8) Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 2.

F V a) Ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}$ parallelo ad U ha dimensione almeno 2.
F V b) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.
F V c) Ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}$ che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U.
F V d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

9) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

F V a) B è non definita.
F V b) A e B sono congruenti.
F V c) A è diagonalizzabile per congruenza.
F V d) B è diagonalizzabile per similitudine.

7 Giugno 2010 **I appello** **Num. Matr.** 00110

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) La struttura algebrica $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$

F V a) è un anello.
F V b) è un campo.
F V c) ha zero divisori.
F V d) ha infiniti elementi invertibili.

2) Sia (B, A) una coppia di matrici conformabili (cioè per cui definito il prodotto righe per colonne di B per A). Allora

F V a) la coppia $({}^tA, {}^tB)$ è conformabile.
F V b) la coppia $({}^tB, A)$ è conformabile.
F V c) il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.
F V d) la coppia (BA, B) è conformabile.

3) Siano A e C, rispettivamente, la matrice incompleta e completa di un sistema indeterminato con 10 equazioni e 9 incognite. Allora

F V a) $\det(C) \neq 0$.
F V b) le righe di A sono linearmente dipendenti.
F V c) le colonne di A sono linearmente dipendenti.
F V d) $\rho(A) < \rho(C)$.

4) In uno spazio vettoriale reale V siano v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti e sia $W = L(v_1, v_2, v_3)$. Allora

F V a) $\sqrt{7}v_1 - v_2 + v_3 \in W$.
F V b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di W.
F V c) $\{v_1, v_2 + v_3, v_3\}$ è un insieme di generatori per W.
F V d) $\{v_1, v_2, v_3, v_2 + v_3\}$ è un insieme di generatori per W.

5) Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare che ha $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ come matrice associata. Allora

F V a) T è iniettiva.
F V b) T è suriettiva.
F V c) $\dim V = 3$.
F V d) $\dim(\operatorname{Im} T) = 1$.

6) Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(1,1,3) = (-1,-1,-3)$, $T(2,1,1) = (4,2,2)$ e $T(1,1,1) = (-1,-1,-1)$. Allora

F **V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.

F **V** b) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.

F **V** c) $(-2,-1,-1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.

F **V** d) $\mathbf{R}^3$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) In $\mathbf{R}^5$ con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \beta \end{cases}$$

F **V** a) Allora $\{(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,1)\}$ è una base di ${}^{\perp}U$.

F **V** b) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^{\perp}U \oplus U$.

F **V** c) Allora $\{(1,-1,0,-1,0)\} \in {}^{\perp}U$.

F **V** d) Se $v \in U$ e $w \in {}^{\perp}U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

8) Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 4.

F **V** a) Ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}$ parallelo a U ha dimensione 4.

F **V** b) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.

F **V** c) Ogni sottospazio affine di U che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U.

F **V** d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

9) Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

F **V** a) A è non definita.

F **V** b) A e B sono congruenti.

F **V** c) A è diagonalizzabile per congruenza.

F **V** d) B è diagonalizzabili per similitudine.

7 Giugno 2010 **I Appello (totale)** **N. Matr.**..........................

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

valori per risoluzione:
v1) $b=3$ $a=1$
v2) $b=4$ $a=3$
v3) $b=0$ $a=0$
v4) $b=5$ $a=5$

---

1) Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10-b & 0 & -b-a-9 \\ b-a-9 & a+1 & b-a-9 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A. *(2 punti)*

b) Sia $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione canonicamente associata ad A. Scelto a piacere un autospazio per T_A, se ne trovi una base. *(3 punti)*

2) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = (-1, 1, a+1)$, $v_2 = (-2, 2, 1+\lambda)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$.

a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. *(3 punti)*

b) Fissato $\lambda = 1 + 2a$, sia A la matrice che ha come i-esima riga il vettore v_i. Si determinino le soluzioni del sistema lineare $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. *(3 punti)*

c) Fissato $\lambda = 2a + 2$ sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $F(v_1) = 3v_1 + 2v_2$, $F(v_2) = 0$ e $F(v_3) = (3, -3, -3a-3)$. Si determini la matrice associata a F rispetto a $\mathcal{B}$. *(3 punti)* $\mathbb{R}^3$

3) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano Π : $\begin{cases} x = 3 + (a+1)\alpha \\ y = \alpha - (10-b)\beta \\ z = (a+1) - \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

a) Si determini una rappresentazione cartesiana per il piano Π' passante per il punto $P = (3, -1, a+1)$ e parallelo al piano Π. *(2 punti)*

b) Si calcoli la distanza tra Π e Π'. *(2 punti)*

1a) $\Delta_A(t) = \det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-10+b & 0 & b+a+9 \\ -b+a+9 & t-a-1 & -b+a+9 \\ 0 & 0 & t-a-1 \end{vmatrix} = (t-a-1) \begin{vmatrix} t-10+b & 0 \\ -b+a+9 & t-a-1 \end{vmatrix}$

Laplace sulla III riga

$= (t-a-1)(t-a-1)(t-10+b) = 0 \quad t = a+1, 10-b$

autovalori sono $a+1$ e $10-b$

1b) $\lambda = a+1$ $\begin{pmatrix} a-9+b & 0 & b+a+9 \\ -b+a+9 & 0 & -b+a+9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a+b-9 & 0 & b+a+9 \\ 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$U_{a+1}: \begin{cases} (a+b-9)x + (b+a+9)z = 0 \\ 18x = 0 \\ y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

una base di U_{a+1} e' $\boxed{\{(0,1,0)\}}$

SOLO UNO DEI DUE

$\lambda = 10-b$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b+a+9 \\ -b+a+9 & 9-b-a & -b+a+9 \\ 0 & 0 & 9-b-a \end{pmatrix}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x = \dfrac{-9+b+a}{a-b+9}\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ y = \alpha \end{cases}$

una base di U_{10-b} e' $\boxed{\{(-9+b+a, a-b+9, 0)\}}$

2a) $\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a+1 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{A} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda - 2a - 1$

Laplace III riga

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ base $\Leftrightarrow \rho(A) = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2a+1$

2b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a+1 & 3 \\ -2 & 2 & 2a+2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a+1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$ $\begin{cases} x = 9 \\ z = \alpha \\ y = 3 + 9 - (a+1)\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} x = 9 \\ y = 12 - (a+1)\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$ $\boxed{Sol(S) = \{(9, 12 - (a+1)\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}}$

2c) $F(v_1) = 3v_1 + 2v_2 =_{\mathcal{B}} (3, 2, 0)$

$F(v_2) = (0,0,0) =_{\mathcal{B}} (0,0,0)$

$F(v_3) = (3, -3, -3a-3) = -3v_1 =_{\mathcal{B}} (-3, 0, 0)$

$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3a) $\vec{\pi}: \begin{vmatrix} x & a+1 & 0 \\ y & 1 & -(10-b) \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad x(b-9) - y(a+1) - z(a+1)(10-b) = 0$

sviluppo risp. I colonna

$\pi': (b-9)(x-3) - (a+1)(y+1) - (a+1)(10-b)(z-(a+1)) = 0$

$\boxed{\pi': (b-9)x - (a+1)y - (a+1)(10-b)z - 3(b-9) - (a+1) + (a+1)^2(10-b) =}$

3b) $d(\pi, \pi') = d(P, \pi') \quad P \in \pi \quad P = (3, 0, (a+1)) \in \pi \quad (\alpha = \beta = 0)$

$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \dfrac{|\cancel{3(b-9)} - \cancel{(a+1)^2(10-b)} - \cancel{3(b-9)} - (a+1) + \cancel{(a+1)^2(10-b)}|}{\sqrt{(b-9)^2 + (a+1)^2 + (a+1)^2(10-b)^2}}$

$\boxed{d(\pi, \pi') = \dfrac{a+1}{\sqrt{(b-9)^2 + (a+1)^2 + (a+1)^2(10-b)^2}}}$