7 Giugno 2010 **II parziale** **Num. Matr.** 00110

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

F V a) Se $v = \mathbf{0}_V$ allora $\langle v, v\rangle = 0$.
F V b) Se $\langle v, w\rangle = 0$ allora $\langle w, v\rangle = 0$.
F V c) Se V ha dimensione finita esiste una base ortonormale per V.
F V d) L'endomorfismo $T : V \to V$ definito da $T(v) = 2v$ è ortogonale.

2) Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ è diagonalizzabile per similitudine se

F V a) è simile ad una matrice diagonale.
F V b) ha n autovalori distinti.
F V c) ha almeno un autovalore.
F V d) ogni autovalore di A ha molteplicità algebrica uguale alla geometrica.

3) Il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ è un sottospazio affine.

F V a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0\}$.
F V b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
F V c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 1, x + y + z = 0\}$.
F V d) $\{(6, 4, 1), (1, -1, -1)\}$.

4) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $q : V \to \mathbf{R}$ una forma quadratica definita positiva.

F V a) Esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = -I_n$.
F V b) Per ogni $v \in V$ si ha $q(v) \geq 0$.
F V c) $\rho(q) = n$.
F V d) Se A è una matrice associata a q allora $\det A > 0$.

5) In $\mathbf{R}^4$ si considerino i punti $P = (3, 1, 1, 0)$, $Q = (2, 2, 2, 0)$ e $R = (5, -1, 2, 0)$.

F V a) Esiste una retta di $\mathbf{R}^4$ che contiene P, Q e R.
F V b) Esiste un piano di $\mathbf{R}^4$ che contiene P, Q e R.
F V c) I punti P, Q, R sono affinemente indipendenti.
F V d) Se U è un sottospazio affine di $\mathbf{R}^4$ che contiene P, Q e R allora il vettore libero $(-2, 2, 2, 0)$ appartiene alla giacitura di U.

6) Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(1, 1, 3) = (-1, -1, -3)$, $T(2, 1, 1) = (4, 2, 2)$ e $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$. Allora

F V a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V b) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V c) $(-2, -1, -1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) $\mathbf{R}^3$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) In $\mathbf{R}^5$ con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \beta \end{cases}$$

F V a) Allora $\{(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,1)\}$ è una base di ${}^{\perp}U$.

F V b) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^{\perp}U \oplus U$.

F V c) Allora $\{(1,-1,0,-1,0)\} \in {}^{\perp}U$.

F V d) Se $v \in U$ e $w \in {}^{\perp}U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

8) Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 4.

F V a) Ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}$ parallelo a U ha dimensione 4.

F V b) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.

F V c) Ogni sottospazio affine di U che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U.

F V d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

9) Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

F V a) A è non definita.

F V b) A e B sono congruenti.

F V c) A è diagonalizzabile per congruenza.

F V d) B è diagonalizzabili per similitudine.

7 Giugno 2010 **II parziale** **Num. Matr.** 00101

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

F V a) Se $\langle v, v\rangle = 0$ allora $v = \mathbf{0}_V$.
F V b) Se $\langle v, w\rangle = 0$ allora $\langle 3v, 2w\rangle = 0$.
F V c) Se V ha dimensione finita esiste una base ortogonale per V.
F V d) L'endomorfismo $T : V \to V$ definito da $T(v) = -v$ è ortogonale.

2) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ una matrice diagonalizzabile per similitudine.

F V a) Se B è simile ad A allora B è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) Allora A ha n autovalori distinti.
F V c) Allora A ha almeno un autovalore.
F V d) Se λ è un autovalore di A allora $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

3) Il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ è un sottospazio affine.

F V a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid xy = 0\}$.
F V b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 1, x + y + z = 0\}$.
F V c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 = y\}$.
F V d) $\{(0, 0, 0)\}$.

4) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $q : V \to \mathbf{R}$ una forma quadratica definita negativa.

F V a) Esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = -I_n$.
F V b) Per ogni $v \in V$ si ha $q(v) \geq 0$.
F V c) $\varrho(q) = n$.
F V d) Se A è una matrice associata a q allora $\det A < 0$.

5) In $\mathbf{R}^4$ si considerino i punti $P = (3, 1, 1, 0)$, $Q = (2, 2, 2, 0)$ e $R = (5, -1, -1, 0)$.

F V a) Esiste una retta di $\mathbf{R}^4$ che contiene P, Q e R.
F V b) Esiste un piano di $\mathbf{R}^4$ che contiene P, Q e R.
F V c) I punti P, Q e R sono affinemente indipendenti.
F V d) Se U è un sottospazio affine di $\mathbf{R}^4$ che contiene P, Q e R allora il vettore libero $(-1, 1, 1, 0)$ appartiene alla giacitura di U.

6) Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(3, 1, 1) = (6, 2, 2)$, $T(1, 3, 1) = (-1, -3, -1)$ e $T(-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$. Allora

F V a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V b) −1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V c) $(-3, -1, -1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) $\mathbf{R}^3$ ammette una base spettrale relativa a T.

7) In $\mathbf{R}^5$ con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

F ~~**V**~~ a) Allora $\{(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,1)\}$ è una base di ${}^{\perp}U$.

F ~~**V**~~ b) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^{\perp}U \oplus U$.

~~**F**~~ **V** c) Allora $\{(1,-1,0,-1,0)\} \in {}^{\perp}U$.

F ~~**V**~~ d) Se $v \in U$ e $w \in {}^{\perp}U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

8) Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 2.

~~**F**~~ **V** a) Ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}$ parallelo ad U ha dimensione almeno 2.

~~**F**~~ **V** b) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.

~~**F**~~ **V** c) Ogni sottospazio affine di $\mathcal{A}$ che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U.

~~**F**~~ **V** d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

9) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

F ~~**V**~~ a) B è non definita.

F ~~**V**~~ b) A e B sono congruenti.

F ~~**V**~~ c) A è diagonalizzabile per congruenza.

F ~~**V**~~ d) B è diagonalizzabile per similitudine.

7 Giugno 2010 **II Prova Intermedia** **N. Matr.** ....

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

Valori per i parametri
V1) $b=3$ $a=1$
V2) $b=4$ $a=3$
V3) $b=0$ $a=0$
V4) $b=5$ $a=5$

1) Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10-b & 0 & -b-a-9 \\ b-a-9 & a+1 & b-a-9 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A. *(2 punti)*

b) Sia $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione canonicamente associata ad A. Scelto a piacere un autospazio per T_A, se ne trovi una base. *(3 punti)*

2) Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 10-b \end{pmatrix}.$$

a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita positiva. *(3 punti)*

b) Sia $\lambda = b+2$. In $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori $v = (3,1,-1)$ e $w = (1,-1,1)$ e si determini la proiezione ortogonale del vettore v su $L(w)$ rispetto al prodotto scalare $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definito $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. *(3 punti)*

c) Fissato $\lambda = -a-1$, si classifichi la conica che ha A come discriminante. *(3 punti)*

3) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano $\Pi : \begin{cases} x = 3 + (a+1)\alpha \\ y = \alpha - (10-b)\beta \\ z = (a+1) - \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

a) Si determini una rappresentazione cartesiana per il piano Π' passante per il punto $P = (3,-1,a+1)$ e parallelo al piano Π. *(2 punti)*

b) Si calcoli la distanza tra Π e Π'. *(2 punti)*

1a) $\Delta_A(t) = \det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t-10+b & 0 & b+a+9 \\ -b+a+9 & t-a-1 & -b+a+9 \\ 0 & 0 & t-a-1 \end{vmatrix} = (t-a-1)\begin{vmatrix} t-10+b & 0 \\ -b+a+9 & t-a-1 \end{vmatrix}$

Laplace sulla III riga

$= (t-a-1)^2(t-10-b) = 0 \quad t = a+1, 10-b$

$\Rightarrow$ autovalori sono $\boxed{a+1 \text{ e } 10-b}$

1b) $\lambda = a+1$ $\begin{pmatrix} a-9+b & 0 & b+a+9 \\ -b+a+9 & 0 & -b+a+9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a+b-9 & 0 & b+a+9 \\ 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$U_{a+1} : \begin{cases} (a+b-9)x + (b+a+9)z = 0 \\ 18x = 0 \\ y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{base di } U_{a+1} \text{ è } \{(0,1,0)\}}$

SOLO UNO DEI DUE

$\lambda = 10-b$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b+a+9 \\ -b+a+9 & 9-b-a & -b+a+9 \\ 0 & 0 & 9-b-a \end{pmatrix}$ $U_{10-b} : \begin{cases} z = 0 \\ x = \dfrac{-9+b+a}{a-b+9}\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ y = \alpha \end{cases}$

una base di U_{10-b} è $\boxed{\{(-9+b+a, a-b+9, 0)\}}$

$$\begin{cases} (a+1)\lambda - 1 > 0 \\ \det A > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda > \dfrac{1}{a+1} \\ -1(10-b-1) + \lambda\big((a+1)(10-b)-1\big) + 1(-a-1+1) > 0 \end{cases}$$

(laplace II riga)

$$\begin{cases} \lambda > \dfrac{1}{a+1} \\ \lambda > \dfrac{a-b+9}{(a+1)(10-b)-1} \end{cases}$$

A è def. pos. se $\boxed{\lambda > \dfrac{a-b+9}{(a+1)(10-b)-1}}$

2b) $\langle (3,1,-1),(1,-1,1)\rangle = (3\ 1\ -1)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3a-15$

$\langle (1,-1,1),(1,-1,1)\rangle = (1,-1,1)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a+11$

$\Rightarrow$ La proiezione di v su L(w) è $\dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\, w = \boxed{\dfrac{3a-15}{a+11}(1,-1,1)}$

2c) $\det A = (-a-1)\big((a+1)(10-b)-1\big) - a + b - 9 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -a-1 & -1 \\ -1 & 10-b \end{vmatrix} = -(a+1)(10-b) - 1 < 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la conica è un iperbole}}$

3a) $\Pi:\ \begin{vmatrix} x & a+1 & 0 \\ y & 1 & -(10-b) \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x(b-9) - y(a+1) - z(a+1)(10-b) =$

$\uparrow$ sviluppo rispetto I colonna

$\Pi':\ (b-9)(x-3) - (a+1)(y+1) - (a+1)(10-b)\big(z-(a+1)\big) = 0$

$\boxed{\Pi':\ (b-9)x - (a+1)y - (a+1)(10-b)z - 3(b-9) - (a+1) + (a+1)^2(10-b) = 0}$

3b) $d(\Pi,\Pi') = d(P,\Pi')$ ~~$P\in\Pi$~~ $P = (3,0,a+1) \in \Pi \ (\alpha=\beta=0)$

$$d(\Pi,\Pi') = d(P,\Pi') = \frac{\left|\cancel{3(b-9)} - \cancel{(a+1)^2(10-b)} - \cancel{3(b-9)} - (a+1) + \cancel{(a+1)^2(10-b)}\right|}{\sqrt{(b-9)^2 + (a+1)^2 + (a+1)^2(10-b)^2}}$$

$$\boxed{d(\Pi,\Pi') = \frac{a+1}{\sqrt{(b-9)^2 + (a+1)^2 + (a+1)^2(10-b)^2}}}$$