17 Febbraio 2011 **Num. Matr.** 00101

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Sia A una matrice ridotta a gradini per righe.

F V a) Se A è quadrata, allora il determinante di A è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

F V b) Il rango di A è il numero di righe non nulle.

F V c) Se A ha un pivot su ogni colonna, un qualsiasi sistema che ha A come matrice completa è impossibile.

F V d) Se A ha un pivot su ogni riga, un qualsiasi sistema che ha A come matrice dei coefficienti è determinato.

2) Sia A una matrice ortogonale di ordine n. Allora

F V a) il determinante di A è uguale a 1.

F V b) A ha rango massimo.

F V c) ${}^tA \cdot A = I_n$.

F V d) $\sum_{i=1}^{n} ||a^i|| = n$, dove $||\cdot||$ indica la norma associata al prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^n$.

3) Il sottoinsieme W è un sottospazio dello spazio vettoriale V (con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare).

F V a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z\}$, $V = \mathbf{R}^3$.

F V b) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$, $V = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

F V c) $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid \deg p \geq 3\}$, $V = \mathbf{R}[t]$.

F V d) $W = \{v \in \mathcal{F}(O) \mid v$ ha lunghezza minore o uguale a $2\}$, $V = \mathcal{F}(O)$ (vettori dello spazio applicati in O).

4) Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo e siano $v_1, v_2 \in V$ e $w_1, w_2 \in W$.

F V a) Se v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti allora esiste una trasformazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.

F V b) Se $v_1 \neq 0_V$ e $w_1 = 0_W$ allora non esiste una trasformazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.

F V c) Se $\{w_1, w_2\}$ è una base di W allora esiste un'unica trasformazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.

F V d) Se $v_1 = 0_V$ e $w_1 \neq 0_W$ allora non esiste una trasformazione lineare $T : V \to W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.

17 Febbraio 2011 **Num. Matr.** 00101

5) Sia $\mathcal{F}(O)$ lo spazio vettoriale dei vettori dello spazio applicati in O, sia α l'insieme dei vettori contenuti in un piano α passante per O e sia $\pi : \mathcal{F}(O) \to \mathcal{F}(O)$ l'endomorfismo che associa ad un vettore la sua proiezione ortogonale su α. Allora

F ~~V~~ a) $\mathcal{F}(O)$ è uguale alla somma diretta degli autospazi di π.

F ~~V~~ b) ogni matrice associata a π è diagonalizzabile per similitudine.

F ~~V~~ c) gli autovalori di π sono 0 e 1.

F ~~V~~ d) ogni vettore di α è autovettore di π.

6) Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ e sia $B = 2A$. Allora A e B

~~F~~ V a) sono simili e congruenti.

~~F~~ V b) non sono nè simili nè congruenti.

~~F~~ V c) sono simili, ma non congruenti.

F ~~V~~ d) sono congruenti, ma non simili.

7) In uno spazio affine di dimensione almeno tre, esiste un'unica retta che

F ~~V~~ a) passa per due punti distinti.

~~F~~ V b) è contenuta in due piani fissati.

~~F~~ V c) è parallela ad una retta fissata.

~~F~~ V d) è sghemba con una retta fissata.

8) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

F ~~V~~ a) Allora $\langle v, v \rangle > 0$, per ogni $v \in V$ non nullo.

F ~~V~~ b) Allora ${}^{\perp}V = \{0_V\}$.

F ~~V~~ c) Se $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle = 1$ allora $\langle v_1 + v_2, w \rangle = 2$.

F ~~V~~ d) Allora ${}^{\perp}X$ è un sottospazio vettoriale di V per ogni sottoinsieme X di V.

9) Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ una matrice definita negativa.

F ~~V~~ a) Allora A è congruente a $-I_n$.

F ~~V~~ b) Se $\phi : V \times V \to \mathbf{R}$ ha A come matrice di Gram allora $\phi(v, v) < 0$ per ogni $v \in V$ non nullo.

~~F~~ V c) Il determinante di A è negativo.

F ~~V~~ d) Gli elementi sulla diagonale principale di A sono negativi.

17 Febbraio 2011 **N. Matr...**

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T(1,1,1,1) = (1,2,\lambda)$, $T(1,0,0,0) = (0,1,0)$, $T(1,-1,1,0) = (1,3,1)$ e $T(2,2,1,0) = (0,2,0)$.

   a) Si determini per quali valori di λ la trasformazione T è iniettiva e per quali è suriettiva. *(3 punti)*

   b) Fissato $\lambda = 1$ si trovi una rappresentazione cartesiana per il complemento ortogonale dell'immagine di T. *(3 punti)*

2) Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è diagonalizzabile per similitudine e in caso affermativo si determini una matrice diagonale simile ad A. *(5 punti)*

3) Nello spazio euclideo standard si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

   a) Si determini il piano passante per r e per s. *(3 punti)*

   b) Si determini la distanza tra r ed s. *(4 punti)*

---

1) ⓐ $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\Rightarrow \rho(M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}) = 2 \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff$

con $\mathcal{B} = ((1,1,1,1),(1,0,0,0),(1,-1,1,0),(2,2,1,0))$

$\iff \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \lambda = 1$ $\dim \operatorname{Im} T = \rho(M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{se } \lambda = 1 \end{cases}$

Quindi $\boxed{T \text{ è suriettiva solo se } \lambda \neq 1.}$

Dato che $\dim \operatorname{Ker} T = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim \operatorname{Im} T \geq 4 - 3 = 1$ $\boxed{T \text{ non è mai iniettiva}}$

ⓑ $\lambda = 1$ Una base di $\operatorname{Im} T$ è $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$

$\perp \operatorname{Im} T$: $\begin{cases} \langle (1,2,1),(x,y,z) \rangle = 0 \\ \langle (0,1,0),(x,y,z) \rangle = 0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x+2y+z=0 \\ y=0 \end{cases}}$ sono eq. cartesiane di $\perp \operatorname{Im} T$

---

2) $p_A(t) = \det(A - tI_4) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11-t & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3-t & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1-t \end{vmatrix} = (11-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 3-t & 2 \\ 0 & -2 & -1-t \end{vmatrix}$

$= (11-t)\Big((1-t)\big((3-t)(-1-t)+4\big) - \big((-1-t)+2\big)\Big) = (11-t)(-t^3+3t^2-2t)$

$= t(t-11)(t-2)(t-1)$ Gli autovalori sono $0, 1, 2, 11$

Ho quattro autovalori distinti e A ha ordine 4 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{è diagonalizz. per similitudine}}$. Una matrice diagonale simile ad A è $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}}$

---

3) ⓐ giac r : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$ giac s $= \mathcal{L}(0,1,-1)$

dato che $(0,1,-1)$ soddisfa le equazioni di giac r r è $\parallel$ s. Piano che contiene r e s è il piano che contiene r e un qualsiasi p.to di s. Fascio di piani per r $\lambda(x+y+z-1)+\mu(3x+y+z)=0$

$Q=(0,0,0) \in s$ $-\lambda = 0 \Rightarrow$ il piano è $\boxed{3x+y+z=0}$

ⓑ Dato che r e s sono $\parallel \Rightarrow d(r,s) = d(r,Q)$ $Q=(0,0,0) \in s$. e $d(r,Q) = d(P,Q)$ dove $P = r \cap \pi$ e π è il piano $\perp$ ad r passante per Q.

$\pi : 0(x-0) + 1(y-0) - 1(z-0) = y - z = 0$

$P \begin{cases} y-z=0 \\ x+y+z=1 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y=z \\ 2x=-1 \\ 3x+y+z=0 \end{matrix}$ $\begin{cases} y=z \\ x=-\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}+2z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4} \\ z=\frac{3}{4} \end{cases}$ $P = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

$d(P,Q) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{22}}{4}$ $\boxed{d(r,s) = \frac{\sqrt{22}}{4}}$