Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) La seguente struttura algebrica è un gruppo.

F V a) $(\mathbf{C}, +)$.
F V b) $(\mathbf{Z}, \cdot)$.
F V c) $(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}), +)$, dove $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ indica l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n.
F V d) $(\mathbf{Z}_2, +)$.

2) Sia $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbf{R})$ una matrice di rango 2. Allora

F V a) esiste un minore di ordine 2 di A che ha determinante diverso da zero.
F V b) le righe di A sono linearmente indipendenti.
F V c) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
F V d) ogni sistema che ha A come matrice dei coefficienti è indeterminato.

3) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice tale che $\det A = 3$. Allora

F V a) $-A$ è regolare.
F V b) esiste $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tale che $AB = I_n$.
F V c) $\det(A^2) = \det A$.
F V d) $\det({}^tA) \neq 0$.

4) Un sistema lineare è possibile se

F V a) la matrice completa è quadrata e ha determinante diverso da zero.
F V b) il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle incognite.
F V c) è di Cramer.
F V d) ha meno equazioni che incognite.

5) Sia $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ e sia B la matrice ottenuta da A scambiando la prima e l'ultima riga e sommando alla seconda riga la terza riga moltiplicata per 2. Allora

F V a) $\det A = 2 \det B$.
F V b) il sistema che ha A come matrice completa è equivalente a quello che ha B come matrice completa.
F V c) lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle righe di B.
F V d) lo spazio delle colonne di A coincide con lo spazio delle colonne di B.

6) Il sottoinsieme W è un sottospazio dello spazio vettoriale V, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, se

~~F~~ V a) V è l'insieme dei vettori geometrici del piano applicati in un punto O e W è l'insieme dei vettori (O, P) tali che $P = O$ oppure P appartiene ad una circonferenza unitaria centrata in O.

~~F~~ V b) $V = \mathbf{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1\}$.

~~F~~ V c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ e $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 0\}$.

F ~~V~~ d) $V = \mathbf{R}[t]$ e $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid \deg(p) \leq 3\}$.

7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Allora

F ~~V~~ a) ogni sottoinsieme di V che contiene n vettori linearmente indipendenti è una base di V.

~~F~~ V b) ogni sottoinsieme di V che contiene $n - 1$ vettori è linearmente indipendente.

~~F~~ V c) ogni sottoinsieme di V che contiene $n - 1$ vettori genera V.

F ~~V~~ d) ogni base di V contiene n vettori.

8) È lineare la trasformazione

F ~~V~~ a) $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^n$ definita da $T(A) = a^1$, dove a^1 è la prima riga di A.

F ~~V~~ b) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$ definita da $T(p) = p'$, dove p' indica la derivata di p.

~~F~~ V c) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (x, y, 1)$.

~~F~~ V d) $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definta da $T(A) = \rho(A)$, dove $\rho(A)$ indica il rango di A.

9) Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare suriettiva.

~~F~~ V a) Se $u, v \in V$ sono linearmente indipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente indipendenti.

F ~~V~~ b) Se $u, v \in V$ sono linearmente dipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente dipendenti.

F ~~V~~ c) Se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ genera V allora $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ genera W.

~~F~~ V d) Se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ è una base di W.

17 Aprile 2010 **Num. Matr.** 00110

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) La seguente struttura algebrica è un gruppo.

F V a) $(\mathbf{R}, \cdot)$.

F V b) $(\mathbf{R}[t], +)$.

F V c) $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$, dove $GL_n(\mathbf{R})$ indica l'insieme delle matrici regolari di ordine n.

F V d) $(\mathbf{C}, +)$

2) Sia $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbf{R})$ una matrice di rango 3. Allora

F V a) ogni minore di ordine 3 di A ha determinante diverso da 0.

F V b) le righe di A sono linearmente indipendenti.

F V c) lo spazio delle righe di A è $\mathbf{R}^3$.

F V d) le colonne di A sono linearmente indipendenti.

3) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice tale che $\det A = 1$. Allora

F V a) $2A$ è regolare.

F V b) esiste $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tale che $BA = I_n$.

F V c) $\det(A^2) = \det A$.

F V d) ${}^tA$ è invertibile.

4) Un sistema lineare è impossibile se

F V a) la matrice completa è quadrata e ha determinante diverso da zero.

F V b) il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle variabili.

F V c) non è omogeneo.

F V d) ha meno incognite che equazioni.

5) Sia $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ e sia B la matrice ottenuta da A scambiando la prima e l'ultima colonna e sommando alla seconda colonna la terza colonna moltiplicata per 2. Allora

F V a) $\det A = -\det B$.

F V b) il sistema che ha A come matrice completa è equivalente a quello che ha B come matrice completa.

F V c) lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle righe di B.

F V d) lo spazio delle colonne di A coincide con lo spazio delle colonne di B.

6) Il sottoinsieme W è un sottospazio dello spazio vettoriale V, con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, se

~~F~~ V a) V è l'insieme dei vettori geometrici del piano applicati in un punto O e W è l'insieme dei vettori (O, P) tali che $P = O$ oppure P appartiene ad una retta non passante per O.

F ~~V~~ b) $V = \mathbf{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

F ~~V~~ c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ e $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \,|\mathrm{Tr}(A) = 0\}$, dove $\mathrm{Tr}(A)$ indica la traccia di A.

F ~~V~~ d) $V = \mathbf{R}[t]$ e $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid p_{2k} = 0\} \cup \{p \in \mathbf{R}[t] \mid p_{2k+1} = 0\}$, dove p_k indica il coefficiente del termine di grado k.

7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbf{K}$. Allora

F ~~V~~ a) ogni sottoinsieme di V che contiene n vettori è una base di V.

F ~~V~~ b) ogni sottoinsieme di V che contiene $n + 1$ vettori è linearmente dipendente.

~~F~~ V c) ogni sottoinsieme di V che contiene $n + 1$ vettori è genera V.

~~F~~ V d) $V \cong \mathbf{K}^n$.

8) È lineare la trasformazione

F ~~V~~ a) $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$ definita da $T(A) = \det A$.

F ~~V~~ b) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$ definita da $T(p) = p^2$.

F ~~V~~ c) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

F ~~V~~ d) $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ definita da $T(A) = {}^tA - A$.

9) Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva.

F ~~V~~ a) Se $u, v \in V$ sono linearmente indipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente indipendenti.

F ~~V~~ b) Se $u, v \in V$ sono linearmente dipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente dipendenti.

~~F~~ V c) Se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ genera V allora $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ genera W.

~~F~~ V d) Se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ è una base di W.

17 Aprile 2010 **Prova Intermedia (v5)** **N. Matr.**......................

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, indicando le **motivazioni** dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Si considerino le matrici a coefficienti reali

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & \lambda+4 & -3 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcoli per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile. *(3 punti)*

b) Per $\lambda = 2$ si determini una base dello spazio delle righe di $\mathbf{A}$, mentre per $\lambda = 0$ si determini una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}$. *(3 punti)*

c) Per $\lambda = 4$ si determinino le soluzioni del sistema lineare che ha $\mathbf{A}$ come matrice dei coefficienti e $\mathbf{b}$ come colonna dei termini noti. *(3 punti)*

d) Fissato $\lambda = -7$, siano $U = L(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$ e $W = L(\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4)$. Si determini la dimensione di $U + W$ e quella di $U \cap W$. *(3 punti)*

2) Sia $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F(t) = (0,0,0,3) \qquad F(-2t^2) = (6,0,0,6) \qquad F(2t-1) = (6,0,0,6).$$

a) Si calcoli una base di $\operatorname{Ker} F$ e una di $\operatorname{Im} F$. *(3 punti)*

b) Si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. *(3 punti)*

1a) $\det A \underset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{sulla III riga}}}{=} -\lambda(\lambda-2) \begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 3 & \lambda+4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\lambda(\lambda-2)(-3\lambda+6) = 3\lambda(\lambda-2)^2$

A invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 2$

1b) $\lambda = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad a^2 = 3a^4$ e $a^3 = 0$ $\Rightarrow L(a^1, a^2, a^3, a^4) = L(a^1, a^4)$

a^1 e a^4 sono l.i. $\Rightarrow$ base è $\{(0,-1,10,3), (1,1,2,-1)\}$

$\lambda = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \dim L(a_1, a_2, a_3, a_4) = \rho(A) = 3$

$\det A = 0$

e a_1, a_2, a_4 sono l.i. dato che $\det | \neq 0 \Rightarrow$

base è $\{(0,3,0,1), (10,4,0,2), (3,-3,0,-1)\}$

1c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 10 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{a^4 \leftrightarrow a^1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 3 & 3 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[a^2 \to a^2 - 3a^1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[a^2 \to \frac{1}{8}a^2]{a^2 \leftrightarrow a^3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & -1 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[a^4 \to a^4 + a^2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[a^4 \to 5a^3 - a^4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 107 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -7 - y - 2z + t = -7 - 22 - \frac{107}{3} = -\frac{194}{3} \\ y = 0 \\ z = 11 \\ t = -\frac{107}{3} \end{cases}$$

1d) dato che a^1 e a^2 sono l.i. $\Rightarrow \dim U = 2$

dato che a^3 e a^4 sono l.i. $\Rightarrow \dim W = 2$

$U + W = L(a^1, a^2, a^3, a^4)$ e $\det A \neq 0$ (dal punto a))

$\Rightarrow \dim(U+W) = \rho(A) = 4$

$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 0$

2a) • $\operatorname{Im} F = L((0,0,0,3),(6,0,0,6),(6,0,0,6)) = L((0,0,0,3),(6,0,0,6))$

$(0,0,0,3)$ e $(6,0,0,6)$ sono l.i. $\Rightarrow$ una base e' $\{(0,0,0,3),(6,0,0,6)\}$

• $\dim \ker F = \dim \mathbb{R}_{\leq 2}[t] - \dim \operatorname{Im} F = 3 - 2 = 1$

$F(-2t^2) = F(2t-1) \Longrightarrow (0,0,0,0) = F(-2t^2) - F(2t-1) = F(-2t^2 - (2t-1))$

$\Rightarrow -2t^2 - 2t + 1 \in \ker F \Rightarrow$ base e' $\{-2t^2 - 2t + 1\}$

2b) $F(t^2) = F(-\frac{1}{2}(-2t^2)) = -\frac{1}{2}F(-2t^2) = -\frac{1}{2}(6,0,0,6) = (-3,0,0,-3)$

$1 = -(2t-1) + 2t$

$\Rightarrow F(1) = -F(2t-1) + 2F(t) = -(6,0,0,6) + 2(0,0,0,3) = (-6,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} F(1) \equiv_{\tilde{\mathcal{B}}} (-6,0,0,0) \\ F(t) \equiv_{\tilde{\mathcal{B}}} (0,0,0,3) \\ F(t^2) \equiv_{\tilde{\mathcal{B}}} (-3,0,0,-3) \end{array}\right. \Longrightarrow M_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(F) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$