28 Giugno 2010 **Num. Matr.** 00101

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Sia $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbf{K}$ e siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne. Allora $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$

F V a) è un anello.
F V b) è un campo.
F V c) contiene divisori dello zero.
F V d) gode della proprietà commutativa rispetto al prodotto.

2) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbf{K})$ ha determinante uguale a zero se

F V a) contiene 7 elementi uguali a $0_{\mathbf{K}}$.
F V b) l'insieme delle righe è linearmente indipendente.
F V c) ha rango 6.
F V d) ha l'ultima colonna uguale alla somma delle prime 6.

3) Sia S un sistema lineare risolubile in n variabili a coefficienti in un campo $\mathbf{K}$.

F V a) La colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.
F V b) Se S è indeterminato allora ha al massimo n equazioni.
F V c) La matrice completa non è quadrata.
F V d) L'insieme delle soluzioni di S è un sottospazio affine di $\mathbf{K}^n$.

4) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e sia X un insieme di generatori per V contenente h vettori.

F V a) Se X è linearmente dipendente allora $0_V \in X$.
F V b) Se X è linearmente indipendente allora $\dim V = h$.
F V c) Ogni sistema di generatori per V contiene esettamente h vettori.
F V d) Per ogni $v \in V$ si ha $v \in L(X)$.

5) L'applicazione T è lineare

F V a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $T(x, y, z) = (x^2 + y, y)$.
F V b) $T : \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ definita da $T(A) = A \cdot {}^tA$.
F V c) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}$ definita da $T(p(t)) = p(\sqrt{2})$.
F V d) $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ definita da $T(x, y) = x + y$.

6) Siano $A, B \in M_n(\mathbf{K})$.

F V a) Se B ha gli stessi autovalori di A allora è simile ad A.
F V b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda) = n$.
F V c) Se B è simile ad A allora ha lo stesso rango di A.
F V d) Se 0 è autovalore di A allora A non è invertibile.

7) In uno spazio euclideo siano r una retta e P un punto qualsiasi. Allora esiste

~~F~~ V a) un'unica retta passante per P e sghemba con r.
F ~~V~~ b) un'unica retta passante per P e parallela ad r.
F ~~V~~ c) un unico iperpiano passante per P e ortogonale ad r.
~~F~~ V d) un unico iperpiano passante per P e parallelo ad r.

8) Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli tali che $\langle v, w \rangle = 0$. Allora

F ~~V~~ a) esiste una base ortogonale per V contenente v e w.
~~F~~ V b) esiste una base ortonormale per V contenente v e w.
F ~~V~~ c) $\dim(L(v, w)) = 2$.
F ~~V~~ d) $\widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$.

9) Siano $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

F ~~V~~ a) Allora $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) = n$.
F ~~V~~ b) Se A è definita positiva allora $\sigma(A) = (n, 0)$.
~~F~~ V c) Se A è non definita allora $\det A = 0$.
F ~~V~~ d) Se B è congruente ad A allora $\rho(A) = \rho(B)$

28 Giugno 2010 **Num. Matr.** 00110

Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Siano $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

F V a) Allora $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) = n$.

F V b) Se A è definita positiva allora $\sigma(A) = (n, 0)$.

F V c) Se A è non definita allora $\det A = 0$.

F V d) Se B è congruente ad A allora $\varrho(A) = \varrho(B)$

2) In uno spazio euclideo siano r una retta e P un punto qualsiasi. Allora esiste

F V a) un'unica retta passante per P e sghemba con r.

F V b) un'unica retta passante per P e parallela ad r.

F V c) un unico iperpiano passante per P e ortogonale ad r.

F V d) un unico iperpiano passante per P e parallelo ad r.

3) Sia $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbf{K}$ e siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne. Allora $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$

F V a) è un anello.

F V b) è un campo.

F V c) contiene divisori dello zero.

F V d) gode della proprietà commutativa rispetto al prodotto.

4) Sia S un sistema lineare risolubile in n variabili a coefficienti in un campo $\mathbf{K}$.

F V a) La colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

F V b) Se S è indeterminato allora ha al massimo n equazioni.

F V c) La matrice completa non è quadrata.

F V d) L'insieme delle soluzioni di S è un sottospazio affine di $\mathbf{K}^n$.

5) L'applicazione T è lineare

F V a) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $T(x, y, z) = (x^2 + y, y)$.

F V b) $T : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ definita da $T(A) = A \cdot {}^tA$.

F V c) $T : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}$ definita da $T(p(t)) = p(\sqrt{2})$.

F V d) $T : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ definita da $T(x, y) = x + y$.

6) Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli tali che $\langle v, w \rangle = 0$. Allora

F V a) esiste una base ortogonale per V contenente v e w.

F V b) esiste una base ortonormale per V contenente v e w.

F V c) $\dim(L(v, w)) = 2$.

F V d) $\widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$.

28 Giugno 2010 **Num. Matr.** 00110

7) Una matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbf{K})$ ha determinante uguale a zero se

F V a) contiene 7 elementi uguali a $0_{\mathbf{K}}$.

F V b) l'insieme delle righe è linearmente indipendente.

F V c) ha rango 6.

F V d) ha l'ultima colonna uguale alla somma delle prime 6.

8) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ e sia X un insieme di generatori per V contenente h vettori.

F V a) Se X è linearmente dipendente allora $0_V \in X$.

F V b) Se X è linearmente indipendente allora $\dim V = h$.

F V c) Ogni sistema di generatori per V contiene esettamente h vettori.

F V d) Per ogni $v \in V$ si ha $v \in L(X)$.

9) Siano $A, B \in M_n(\mathbf{K})$.

F V a) Se B ha gli stessi autovalori di A allora è simile ad A.

F V b) Se A è diagonalizzabile per similitudine allora $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda) = n$.

F V c) Se B è simile ad A allora ha lo stesso rango di A.

F V d) Se 0 è autovalore di A allora A non è invertibile.

28 Giugno 2010 **N. Matr.**............................ (v1)

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

Per la V2 scambiate esercizio 1 e 2

1) Sia S il seguente sistema a coefficienti reali nelle variabili x, y, z

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 4x + z = 1 \\ y + z = -1 \\ 7x + y + 2z = \lambda \end{cases}.$$

a) Si discuta il sistema lineare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ (ossia si determini per quali valori di λ il sistema risulta impossibile, per quali determinato e per quali indeterminato). *(3 punti)*

b) In $\mathbb{R}^3$, sia r la retta rappresentata, in forma cartesiana, dalle prime due equazioni di S e sia s quella rappresentata dalle ultime due equazioni di S. Si determini per quali valori di λ le rette r e s risultano sghembe. *(3 punti)*

c) In $\mathbb{R}^3$, sia Π il piano di equazione cartesiana $x + y - 2z = 4$. Si determinino equazioni parametriche per il piano Π' perpendicolare a Π e passante per r. *(3 punti)*

2) Sia $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & 2x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix}$$

a) Si determini una base per $\ker T$. *(3 punti)*

b) Si dica se esiste una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ spettrale per T. *(3 punti)*

c) Si determini $T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. *(3 punti)*

ES 1) a

• $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ $\leftarrow M$

$\det M = 8 + 0 + 0 - 7 - 4 - 0 = -3 \neq 0$ (Sarrus)

$\Rightarrow \rho(A) = 3$ (non ci sono orlati di M in A) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (Th. Kronecker)

• $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \det C = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ ($R^3 \leftarrow R^3 - R^1$, $R^4 \leftarrow R^4 - R^1$) $= (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$ (Laplace sulla II colonna; Sarrus)

$= -(0 - 8 - 3 - 0 + 8 + 3(\lambda - 1)) = -3\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = 2$

$\Rightarrow \rho(C) = 4 \iff \lambda \neq 2$ e $\rho(C) = 3 \iff \lambda = 2$

$\Rightarrow$ per $\lambda = 2$ $\rho(A) = \rho(C) = 3 =$ n° variabili $\Rightarrow S$ determinato
per $\lambda \neq 2$ $\rho(A) = 3 < 4 = \rho(C) \Rightarrow S$ impossibile

---

b) r e s sono sghembe $\iff$ non sono né parallele né incidenti.

r e s non sono incidenti $\iff r \cap s = \emptyset \iff Sol(S) = \emptyset \iff \lambda \neq 2$

r e s non sono parallele $\iff \vec{r} \neq \vec{s} \iff \rho(A) = 3 \Rightarrow$ per $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{r \text{ e } s \text{ sono sghembe} \iff \lambda \neq 2}$

c) fascio di piani per r: $\lambda(3x+y+z-1)+\mu(4x+z-1)=0$

$$x(3\lambda+4\mu)+\lambda y+z(\mu+\lambda)-\lambda-\mu=0$$

$$\Pi' \perp \Pi \iff \langle(3\lambda+4\mu,\lambda,\mu+\lambda),(1,1,-2)\rangle=0$$

$$2\lambda+2\mu=0 \Rightarrow \lambda=-\mu \Rightarrow \lambda=-1 \quad \mu=1$$

$\Rightarrow$ eq. cartesiana di Π' e' $x-y=0$

$\Rightarrow$ eq. parametriche di Π' $\quad \boxed{\Pi': \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta \\ z=\alpha \end{cases} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}}$

ES 2) a) $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2x+y & 2x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha \\ z=\beta \\ t=-\beta \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} \alpha=1\ \beta=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha=0\ \beta=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\}$ sono l.i. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{base di } \ker T \text{ e' } \left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}}$

---

b) Calcolo matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\equiv_{\mathcal{B}}(2,2,0,0) \quad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\equiv_{\mathcal{B}}(1,1,0,0)$

$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\equiv_{\mathcal{B}}(0,0,1,1) \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\equiv_{\mathcal{B}}(0,0,1,1)$

$$M_{\mathcal{B}}(T)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{M_{\mathcal{B}}(T)}(t)=\begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix} \underset{\text{Laplace I riga}}{=} (t-2)\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix}=(t-2)(t-1)\underbrace{((t-1)^2-1)}_{\text{Laplace I riga}}+$$

$$-2\underbrace{((t-1)^2-1)}_{\text{Laplace I riga}}=t^2(t-3)(t-2) \Rightarrow \mathrm{Spec}(T)=\{0,3,2\}$$

$mg(0)=\dim\ker T=2$ (punto a)

$ma(3)=1 \Rightarrow mg(3)=1$

$ma(2)=1 \Rightarrow mg(2)=1$

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(T)} mg(\lambda)=4=\dim M_2(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{esiste una base spettrale}}$

---

c) $T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\left\{A\in M_2(\mathbb{R}) : T(A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\equiv_{\mathcal{B}}(1,1,1,1) \Rightarrow$

$\mathcal{B}$ base di $M_2(\mathbb{R})$ definita nel punto b

$\left\{A\in M_2(\mathbb{R}) : A\equiv_{\mathcal{B}}(x,y,z,t) \quad M_{\mathcal{B}}(T)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Osservo che $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow \boxed{T^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\underbrace{\ker T}_{a}=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & 1-2\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}}$$

Le soluzioni di un sistema lineare sono tutte e sole quelle che si ottengono sommando ad una soluzione particolare, cioè $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, una qualsiasi soluzione del sistema omogeneo associato, cioè una matrice appartenente al $\ker T$.