Marcare con una crocetta su **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora*

1) Siano A e B due matrici tali che la coppia (A, B) sia conformabile.

F V a) Allora la coppia $({}^tB, {}^tA)$ è conformabile.
F V b) Allora la coppia (B, A) è conformabile.
F V c) Se la coppia (B, A) è conformabile allora A e B sono quadrate dello stesso ordine.
F V d) Se è possibile sommare A e B allora A e B sono quadrate dello stesso ordine.

2) Sia S un sistema lineare avente almeno due soluzioni distinte tra cui quella banale. Allora

F V a) S è indeterminato.
F V b) il rango della matrice incompleta associata a S è uguale al rango della matrice completa associata a S.
F V c) l'insieme delle soluzioni di S è uno spazio vettoriale.
F V d) S è un sistema di Cramer.

3) Siano W e U due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V.

F V a) Se $\dim W = \dim U$ allora $W = U$.
F V b) Allora $U \cap W$ contiene almeno un vettore.
F V c) Se $\dim U + \dim W > \dim V$ allora $U \cap W$ contiene almeno un vettore non nullo.
F V d) Se $v \in U \cap W$ allora $-v \in U \cap W$.

4) La seguente trasformazione è lineare.

F V a) $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ definita da $T(A) = \det A$.
F V b) $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $T(x) = e^x$.
F V c) $T : \mathbf{K}[t] \to \mathbf{K}$ definita da $T(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i$.
F V d) $T : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ definita da $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$.

5) Sia $T : V \to V$ un endomorfismo e sia λ un autovalore di T.

F V a) Allora esiste $v \in V$ non nullo tale che $T(v) = \lambda v$.
F V b) Allora esiste una base spettrale per V relativa a T.
F V c) Se A è una matrice associata a T rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V e $\dim V = n$ allora $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
F V d) Se T è invertibile allora $\lambda \neq 0$.

6) Date due rette in uno spazio affine $\mathcal{A}$, esiste un unico piano che contiene entrambe se

F V a) sono parallele e distinte.
F V b) sono incidenti e distinte.
F V c) sono sghembe.
F V d) sono coincidenti.

7) In uno spazio euclideo $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, sia α un sottospazio euclideo di dimensione k e sia $v \in \overrightarrow{\alpha}$ un vettore non nullo.

F ~~V~~ a) Allora esistono $k+1$ punti affinemente indipendenti appartenenti ad α.

F ~~V~~ b) Allora esiste una base ortogonale per $\overrightarrow{\alpha}$ che contiene v.

F ~~V~~ c) Se α è un iperpiano e r è una retta ortogonale ad α allora $v \in \overrightarrow{r}^{\perp}$.

F ~~V~~ d) Se $P \in \mathcal{E}$ è un punto tale che $d(P, \alpha) = 0$ allora $P \in \alpha$.

8) La seguente è una base dello spazio delle matrici triangolari alte di ordine 2.

~~F~~ V a) $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

F ~~V~~ b) $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

~~F~~ V c) $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$.

~~F~~ V d) $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

9) Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\phi : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica.

~~F~~ V a) Se ϕ è definita positiva allora $\phi(v, w) > 0$, per ogni $v, w \in V$.

F ~~V~~ b) Se esiste $v \in V$ tale che $\phi(v, v) > 0$ allora ϕ non è definita negativa.

F ~~V~~ c) Se ϕ ha segnatura (h, k) allora $\dim V \geq h + k$.

F ~~V~~ d) Allora $\phi(v, w) = \phi(w, v)$ per ogni $v, w \in V$.

25 Gennaio 2011 **N. Matr.**..

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$\phi((x,y,z),(x',y',z')) = (4\lambda+7)xx' - 6xy' - 6yx' + 6zy' + 6yz' - 5zx' - 5xz' + 4yy' + (4\lambda+3)zz'.$$

a) Si determini la matrice di Gram associata a ϕ rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(1,1,-1))$. *(3 punti)*

b) Si determinino le equazioni della forma quadratica associata a ϕ e si dica per quali valori di λ è definita positiva. *(3 punti)*

c) Fissato $\lambda = 1$, si determini una base per il complemento ortogonale di $W = L((1,0,0),(0,1,0))$. *(3 punti)*

2) Sia S il sistema lineare nelle variabili x, y, z a coefficienti in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + \lambda y + z = -1 \\ 3x + 3y + z = -1 \\ (\lambda+3)x + (\lambda+3)y + 2z = \cancel{-2\lambda} \; -\frac{2\lambda}{3} \end{cases}$$

a) Si discuta il sistema al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. *(3 punti)*

b) Fissato $\lambda = 3$, sia α il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che ha S come rappresentazione cartesiana. Si determinino le equazioni cartesiane della retta perpendicolare ad α e passante per il punto $P = (1,1,1)$. *(3 punti)*

c) Fissato $\lambda = 0$, sia P la soluzione di S. Si determini la distanza di P dal piano di equazione $x + y + z = 1$. *(3 punti)*

1a)

$\phi((1,0,1),(1,0,1)) = 8\lambda$ $\phi((1,0,1),(0,1,0)) = 0$ $\phi((1,0,1),(1,1,-1)) = 4$

$\phi((0,1,0),(0,1,0)) = 4$ $\phi((0,1,0),(1,1,-1)) = -8$ $\phi((1,1,-1),(1,1,-1)) = 8\lambda$

$$G_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 8\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 8\lambda \end{pmatrix}$$

1b) $q(x,y,z) = (4\lambda+7)x^2 - 12xy + 12zy - 10xz + 4y^2 + (4\lambda+3)z^2$

Th. Sylvester $\begin{cases} 8\lambda > 0 \\ \begin{vmatrix} 8\lambda & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0 \\ \det G_{\mathcal{B}}(\phi) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda > 0 \\ 4\lambda^2 - 8\lambda - 1 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda < \frac{2-\sqrt5}{2} \vee \lambda > \frac{2+\sqrt5}{2} \end{cases} \Longrightarrow$ q e' definita positiva se $\lambda > \frac{2+\sqrt5}{2}$

1c) $W^\perp: \begin{cases} \phi((x,y,z),(1,0,0)) = 0 \\ \phi((x,y,z),(0,1,0)) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 11x - 6y - 5z = 0 \\ -6x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -\frac{9}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

una base per $W^\perp$ e' $\{(-4,-9,2)\}$

2a) $\begin{vmatrix} 3 & \lambda & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 15 \neq 0$ $\lambda \neq 3$ $\rho(A) = \rho(A|b) = 3$

sistema determinato

$\lambda = 3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = 1$

sistema indeterminato

1b) $\alpha: 3x + 3y + z = -1$

$(x,y,z) \in r \Longleftrightarrow (x,y,z) = (1,1,1) + L((3,3,1))$

$\Longleftrightarrow \rho\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ y-1 & 3 \\ z-1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $|1| \neq 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

2c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 3x = -1 - z \Longrightarrow x = -\frac{2}{3} \\ z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $P = (-\frac{2}{3}, 0, 1)$

$d(P,\pi) = \frac{|-\frac{2}{3} + 0 + 1 - 1|}{\sqrt3} = \frac{2}{3\sqrt3} = \frac{2\sqrt3}{9}$