

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La seguente struttura algebrica è un gruppo.

- F V** a) $(\mathbf{C}, +)$.
F V b) (\mathbf{Z}, \cdot) .
F V c) $(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}), +)$, dove $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ indica l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n .
F V d) $(\mathbf{Z}_2, +)$.

2) Sia $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbf{R})$ una matrice di rango 2. Allora

- F V** a) esiste un minore di ordine 2 di A che ha determinante diverso da zero.
F V b) le righe di A sono linearmente indipendenti.
F V c) le colonne di A sono linearmente indipendenti.
F V d) ogni sistema che ha A come matrice dei coefficienti è indeterminato.

3) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice tale che $\det A = 3$. Allora

- F V** a) $-A$ è regolare.
F V b) esiste $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tale che $AB = I_n$.
F V c) $\det(A^2) = \det A$.
F V d) $\det({}^t A) \neq 0$.

4) Un sistema lineare è possibile se

- F V** a) la matrice completa è quadrata e ha determinante diverso da zero.
F V b) il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle incognite.
F V c) è di Cramer.
F V d) ha meno equazioni che incognite.

5) Sia $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ e sia B la matrice ottenuta da A scambiando la prima e l'ultima riga e sommando alla seconda riga la terza riga moltiplicata per 2. Allora

- F V** a) $\det A = 2 \det B$.
F V b) il sistema che ha A come matrice completa è equivalente a quello che ha B come matrice completa.
F V c) lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle righe di B .
F V d) lo spazio delle colonne di A coincide con lo spazio delle colonne di B .

6) Il sottoinsieme W è un sottospazio dello spazio vettoriale V , con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, se

- F V** a) V è l'insieme dei vettori geometrici del piano applicati in un punto O e W è l'insieme dei vettori (O, P) tali che $P = O$ oppure P appartiene ad una circonferenza unitaria centrata in O .
- F V** b) $V = \mathbf{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1\}$.
- F V** c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ e $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 0\}$.
- F V** d) $V = \mathbf{R}[t]$ e $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid \deg(p) \leq 3\}$.

7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Allora

- F V** a) ogni sottoinsieme di V che contiene n vettori linearmente indipendenti è una base di V .
- F V** b) ogni sottoinsieme di V che contiene $n - 1$ vettori è linearmente indipendente.
- F V** c) ogni sottoinsieme di V che contiene $n - 1$ vettori genera V .
- F V** d) ogni base di V contiene n vettori.

8) È lineare la trasformazione

- F V** a) $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^n$ definita da $T(A) = a^1$, dove a^1 è la prima riga di A .
- F V** b) $T : \mathbf{R}[t] \rightarrow \mathbf{R}[t]$ definita da $T(p) = p'$, dove p' indica la derivata di p .
- F V** c) $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (x, y, 1)$.
- F V** d) $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $T(A) = \rho(A)$, dove $\rho(A)$ indica il rango di A .

9) Sia $T : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare suriettiva.

- F V** a) Se $u, v \in V$ sono linearmente indipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente indipendenti.
- F V** b) Se $u, v \in V$ sono linearmente dipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente dipendenti.
- F V** c) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera W .
- F V** d) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ è una base di W .

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La seguente struttura algebrica è un gruppo.

- F** **V** a) (\mathbf{R}, \cdot) .
F **V** b) $(\mathbf{R}[t], +)$.
F **V** c) $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$, dove $GL_n(\mathbf{R})$ indica l'insieme delle matrici regolari di ordine n .
F **V** d) $(\mathbf{C}, +)$

2) Sia $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbf{R})$ una matrice di rango 3. Allora

- F** **V** a) ogni minore di ordine 3 di A ha determinante diverso da 0.
F **V** b) le righe di A sono linearmente indipendenti.
F **V** c) lo spazio delle righe di A è \mathbf{R}^3 .
F **V** d) le colonne di A sono linearmente indipendenti.

3) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice tale che $\det A = 1$. Allora

- F** **V** a) $2A$ è regolare.
F **V** b) esiste $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tale che $BA = I_n$.
F **V** c) $\det(A^2) = \det A$.
F **V** d) ${}^t A$ è invertibile.

4) Un sistema lineare è impossibile se

- F** **V** a) la matrice completa è quadrata e ha determinante diverso da zero.
F **V** b) il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle variabili.
F **V** c) non è omogeneo.
F **V** d) ha meno incognite che equazioni.

5) Sia $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ e sia B la matrice ottenuta da A scambiando la prima e l'ultima colonna e sommando alla seconda colonna la terza colonna moltiplicata per 2. Allora

- F** **V** a) $\det A = -\det B$.
F **V** b) il sistema che ha A come matrice completa è equivalente a quello che ha B come matrice completa.
F **V** c) lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle righe di B .
F **V** d) lo spazio delle colonne di A coincide con lo spazio delle colonne di B .

6) Il sottoinsieme W è un sottospazio dello spazio vettoriale V , con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, se

- F V** a) V è l'insieme dei vettori geometrici del piano applicati in un punto O e W è l'insieme dei vettori (O, P) tali che $P = O$ oppure P appartiene ad una retta non passante per O .
F V b) $V = \mathbf{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
F V c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ e $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \text{Tr}(A) = 0\}$, dove $\text{Tr}(A)$ indica la traccia di A .
F V d) $V = \mathbf{R}[t]$ e $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid p_{2k} = 0\} \cup \{p \in \mathbf{R}[t] \mid p_{2k+1} = 0\}$, dove p_k indica il coefficiente del termine di grado k .

7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo \mathbf{K} . Allora

- F V** a) ogni sottoinsieme di V che contiene n vettori è una base di V .
F V b) ogni sottoinsieme di V che contiene $n + 1$ vettori è linearmente dipendente.
F V c) ogni sottoinsieme di V che contiene $n + 1$ vettori è generatore di V .
F V d) $V \cong \mathbf{K}^n$.

8) È lineare la trasformazione

- F V** a) $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $T(A) = \det A$.
F V b) $T : \mathbf{R}[t] \rightarrow \mathbf{R}[t]$ definita da $T(p) = p^2$.
F V c) $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
F V d) $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ definita da $T(A) = {}^t A - A$.

9) Sia $T : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare iniettiva.

- F V** a) Se $u, v \in V$ sono linearmente indipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente indipendenti.
F V b) Se $u, v \in V$ sono linearmente dipendenti allora $T(u)$ e $T(v)$ sono linearmente dipendenti.
F V c) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera W .
F V d) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ è una base di W .