

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

- F V** a) Se $\langle v, v \rangle = 0$ allora $v = \mathbf{0}_V$.
F V b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\langle 3v, 2w \rangle = 0$.
F V c) Se V ha dimensione finita esiste una base ortogonale per V .
F V d) L'endomorfismo $T : V \rightarrow V$ definito da $T(v) = -v$ è ortogonale.

2) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ una matrice diagonalizzabile per similitudine.

- F V** a) Se B è simile ad A allora B è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) Allora A ha n autovalori distinti.
F V c) Allora A ha almeno un autovalore.
F V d) Se λ è un autovalore di A allora $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

3) Il seguente sottoinsieme di \mathbf{R}^3 è un sottospazio affine.

- F V** a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid xy = 0\}$.
F V b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 1, x + y + z = 0\}$.
F V c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 = y\}$.
F V d) $\{(0, 0, 0)\}$.

4) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $q : V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma quadratica definita negativa.

- F V** a) Esiste una base \mathcal{B} di V tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = -I_n$.
F V b) Per ogni $v \in V$ si ha $q(v) \geq 0$.
F V c) $\varrho(q) = n$.
F V d) Se A è una matrice associata a q allora $\det A < 0$.

5) In \mathbf{R}^4 si considerino i punti $P = (3, 1, 1, 0)$, $Q = (2, 2, 2, 0)$ e $R = (5, -1, -1, 0)$.

- F V** a) Esiste una retta di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
F V b) Esiste un piano di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
F V c) I punti P, Q e R sono affinementemente indipendenti.
F V d) Se U è un sottospazio affine di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R allora il vettore libero $(-1, 1, 1, 0)$ appartiene alla giacitura di U .

6) Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(3, 1, 1) = (6, 2, 2)$, $T(1, 3, 1) = (-1, -3, -1)$ e $T(-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$. Allora

- F V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V b) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V c) $(-3, -1, -1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) \mathbf{R}^3 ammette una base spettrale relativa a T .

- 7) In \mathbf{R}^5 con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

- F V** a) Allora $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$ è una base di ${}^\perp U$.
F V b) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$.
F V c) Allora $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$.
F V d) Se $v \in U$ e $w \in {}^\perp U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

- 8) Sia \mathcal{A} uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 2.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di \mathcal{A} parallelo ad U ha dimensione almeno 2.
F V b) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.
F V c) Ogni sottospazio affine di \mathcal{A} che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U .
F V d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

- 9) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

- F V** a) B è non definita.
F V b) A e B sono congruenti.
F V c) A è diagonalizzabile per congruenza.
F V d) B è diagonalizzabile per similitudine.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

- F V** a) Se $v = \mathbf{0}_V$ allora $\langle v, v \rangle = 0$.
F V b) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\langle w, v \rangle = 0$.
F V c) Se V ha dimensione finita esiste una base ortonormale per V .
F V d) L'endomorfismo $T : V \rightarrow V$ definito da $T(v) = 2v$ è ortogonale.

2) Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ è diagonalizzabile per similitudine se

- F V** a) è simile ad una matrice diagonale.
F V b) ha n autovalori distinti.
F V c) ha almeno un autovalore.
F V d) ogni autovalore di A ha molteplicità algebrica uguale alla geometrica.

3) Il seguente sottoinsieme di \mathbf{R}^3 è un sottospazio affine.

- F V** a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0\}$.
F V b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
F V c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 1, x + y + z = 0\}$.
F V d) $\{(6, 4, 1), (1, -1, -1)\}$.

4) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $q : V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma quadratica definita positiva.

- F V** a) Esiste una base \mathcal{B} di V tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = -I_n$.
F V b) Per ogni $v \in V$ si ha $q(v) \geq 0$.
F V c) $\rho(q) = n$.
F V d) Se A è una matrice associata a q allora $\det A > 0$.

5) In \mathbf{R}^4 si considerino i punti $P = (3, 1, 1, 0)$, $Q = (2, 2, 2, 0)$ e $R = (5, -1, 2, 0)$.

- F V** a) Esiste una retta di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
F V b) Esiste un piano di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
F V c) I punti P, Q, R sono affinementemente indipendenti.
F V d) Se U è un sottospazio affine di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R allora il vettore libero $(-2, 2, 2, 0)$ appartiene alla giacitura di U .

6) Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(1, 1, 3) = (-1, -1, -3)$, $T(2, 1, 1) = (4, 2, 2)$ e $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$. Allora

- F V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V b) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V c) $(-2, -1, -1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) \mathbf{R}^3 ammette una base spettrale relativa a T .

7) In \mathbf{R}^5 con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

F V a) Allora $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$ è una base di ${}^\perp U$.

F V b) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$.

F V c) Allora $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$.

F V d) Se $v \in U$ e $w \in {}^\perp U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

8) Sia \mathcal{A} uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 4.

F V a) Ogni sottospazio affine di \mathcal{A} parallelo a U ha dimensione 4.

F V b) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.

F V c) Ogni sottospazio affine di U che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U .

F V d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

9) Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

F V a) A è non definita.

F V b) A e B sono congruenti.

F V c) A è diagonalizzabile per congruenza.

F V d) B è diagonalizzabili per similitudine.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Il seguente sottoinsieme di \mathbf{R}^3 è un sottospazio affine.

- F V** a) $\{(0, 0, 0)\}$.
F V b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 1, x + y + z = 0\}$.
F V c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 = y\}$.
F V d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid xy = 0\}$.

2) In \mathbf{R}^4 si considerino i punti $P = (3, 1, 1, 0)$, $Q = (2, 2, 2, 0)$ e $R = (5, -1, -1, 0)$.

- F V** a) Esiste un piano di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
F V b) Esiste una retta di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
F V c) I punti P, Q e R sono affinementemente indipendenti.
F V d) Se U è un sottospazio affine di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R allora il vettore libero $(-1, 1, 1, 0)$ appartiene alla giacitura di U .

3) In \mathbf{R}^5 con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

- F V** a) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$.
F V b) Allora $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$ è una base di ${}^\perp U$.
F V c) Allora $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$.
F V d) Se $v \in U$ e $w \in {}^\perp U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

4) Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

- F V** a) B è diagonalizzabile per similitudine.
F V b) A e B sono congruenti.
F V c) A è diagonalizzabile per congruenza.
F V d) B è non definita.

5) Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(3, 1, 1) = (6, 2, 2)$, $T(1, 3, 1) = (-1, -3, -1)$ e $T(-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$. Allora

- F V** a) \mathbf{R}^3 ammette una base spettrale relativa a T .
F V b) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
F V c) $(-3, -1, -1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.

6) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ una matrice diagonalizzabile per similitudine.

- F V** a) Allora A ha n autovalori distinti.
F V b) Se B è simile ad A allora B è diagonalizzabile per similitudine.
F V c) Allora A ha almeno un autovalore.
F V d) Se λ è un autovalore di A allora $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

7) Sia \mathcal{A} uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 2.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di \mathcal{A} parallelo ad U ha dimensione almeno 2.
F V b) Ogni sottospazio affine di \mathcal{A} che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U .
F V c) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.
F V d) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

8) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $q : V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma quadratica definita negativa.

- F V** a) $\varrho(q) = n$.
F V b) Per ogni $v \in V$ si ha $q(v) \geq 0$.
F V c) Esiste una base \mathcal{B} di V tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = -I_n$.
F V d) Se A è una matrice associata a q allora $\det A < 0$.

9) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

- F V** a) Se $\langle v, v \rangle = 0$ allora $v = \mathbf{0}_V$.
F V b) Se V ha dimensione finita esiste una base ortogonale per V .
F V c) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\langle 3v, 2w \rangle = 0$.
F V d) L'endomorfismo $T : V \rightarrow V$ definito da $T(v) = -v$ è ortogonale.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ è diagonalizzabile per similitudine se

- F V** a) è simile ad una matrice diagonale.
- F V** b) ha almeno un autovalore.
- F V** c) ha n autovalori distinti.
- F V** d) ogni autovalore di A ha molteplicità algebrica uguale alla geometrica.

2) In \mathbf{R}^4 si considerino i punti $P = (3, 1, 1, 0)$, $Q = (2, 2, 2, 0)$ e $R = (5, -1, 2, 0)$.

- F V** a) Se U è un sottospazio affine di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R allora il vettore libero $(-2, 2, 2, 0)$ appartiene alla giacitura di U .
- F V** b) Esiste un piano di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .
- F V** c) I punti P, Q, R sono affinementemente indipendenti.
- F V** d) Esiste una retta di \mathbf{R}^4 che contiene P, Q e R .

3) Sia \mathcal{A} uno spazio affine di dimensione 6 e sia U un suo sottospazio affine di dimensione 4.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di \mathcal{A} parallelo a U ha dimensione 4.
- F V** b) La giacitura di U contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.
- F V** c) Ogni sottospazio affine di U che ha almeno 3 punti in comune con U coincide con U .
- F V** d) Esiste una rappresentazione cartesiana per U avente 2 equazioni.

4) Sia $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da $T(1, 1, 3) = (-1, -1, -3)$, $T(2, 1, 1) = (4, 2, 2)$ e $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$. Allora

- F V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.
- F V** b) \mathbf{R}^3 ammette una base spettrale relativa a T .
- F V** c) $(-2, -1, -1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 2.
- F V** d) -1 è autovalore con molteplicità geometrica 2.

5) Il seguente sottoinsieme di \mathbf{R}^3 è un sottospazio affine.

- F V** a) $\{(6, 4, 1), (1, -1, -1)\}$.
- F V** b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- F V** c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 1, x + y + z = 0\}$.
- F V** d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0\}$.

6) In \mathbf{R}^5 con il prodotto scalare standard sia U il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

- F V** a) Allora $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$ è una base di ${}^\perp U$.
F V b) Se $v \in U$ e $w \in {}^\perp U$ sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.
F V c) Allora $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$.
F V d) Allora $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$.

7) Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ due matrici a coefficienti reali.

- F V** a) A e B sono congruenti.
F V b) A è non definita.
F V c) A è diagonalizzabile per congruenza.
F V d) B è diagonalizzabili per similitudine.

8) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $q : V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma quadratica definita positiva.

- F V** a) $\rho(q) = n$.
F V b) Per ogni $v \in V$ si ha $q(v) \geq 0$.
F V c) Esiste una base \mathcal{B} di V tale che $Q_{\mathcal{B}}(q) = -I_n$.
F V d) Se A è una matrice associata a q allora $\det A > 0$.

9) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

- F V** a) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\langle w, v \rangle = 0$.
F V b) Se $v = \mathbf{0}_V$ allora $\langle v, v \rangle = 0$.
F V c) Se V ha dimensione finita esiste una base ortonormale per V .
F V d) L'endomorfismo $T : V \rightarrow V$ definito da $T(v) = 2v$ è ortogonale.