

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta,  $-1/2$  punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La seguente struttura algebrica è un gruppo.

- F V** a)  $(\mathbf{C}, +)$ .  
**F V** b)  $(\mathbf{Z}, \cdot)$ .  
**F V** c)  $(\mathcal{S}_n(\mathbf{R}), +)$ , dove  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  indica l'insieme delle matrici simmetriche di ordine  $n$ .  
**F V** d)  $(\mathbf{Z}_2, +)$ .

2) Sia  $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbf{R})$  una matrice di rango 2. Allora

- F V** a) esiste un minore di ordine 2 di  $A$  che ha determinante diverso da zero.  
**F V** b) le righe di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**F V** c) le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**F V** d) ogni sistema che ha  $A$  come matrice dei coefficienti è indeterminato.

3) Sia  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  una matrice tale che  $\det A = 3$ . Allora

- F V** a)  $-A$  è regolare.  
**F V** b) esiste  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tale che  $AB = I_n$ .  
**F V** c)  $\det(A^2) = \det A$ .  
**F V** d)  $\det({}^t A) \neq 0$ .

4) Un sistema lineare è possibile se

- F V** a) la matrice completa è quadrata e ha determinante diverso da zero.  
**F V** b) il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle incognite.  
**F V** c) è di Cramer.  
**F V** d) ha meno equazioni che incognite.

5) Sia  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$  e sia  $B$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando la prima e l'ultima riga e sommando alla seconda riga la terza riga moltiplicata per 2. Allora

- F V** a)  $\det A = 2 \det B$ .  
**F V** b) il sistema che ha  $A$  come matrice completa è equivalente a quello che ha  $B$  come matrice completa.  
**F V** c) lo spazio delle righe di  $A$  coincide con lo spazio delle righe di  $B$ .  
**F V** d) lo spazio delle colonne di  $A$  coincide con lo spazio delle colonne di  $B$ .

6) Il sottoinsieme  $W$  è un sottospazio dello spazio vettoriale  $V$ , con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, se

- F V** a)  $V$  è l'insieme dei vettori geometrici del piano applicati in un punto  $O$  e  $W$  è l'insieme dei vettori  $(O, P)$  tali che  $P = O$  oppure  $P$  appartiene ad una circonferenza unitaria centrata in  $O$ .
- F V** b)  $V = \mathbf{R}^2$  e  $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1\}$ .
- F V** c)  $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  e  $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 0\}$ .
- F V** d)  $V = \mathbf{R}[t]$  e  $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid \deg(p) \leq 3\}$ .

7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Allora

- F V** a) ogni sottoinsieme di  $V$  che contiene  $n$  vettori linearmente indipendenti è una base di  $V$ .
- F V** b) ogni sottoinsieme di  $V$  che contiene  $n - 1$  vettori è linearmente indipendente.
- F V** c) ogni sottoinsieme di  $V$  che contiene  $n - 1$  vettori genera  $V$ .
- F V** d) ogni base di  $V$  contiene  $n$  vettori.

8) È lineare la trasformazione

- F V** a)  $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^n$  definita da  $T(A) = a^1$ , dove  $a^1$  è la prima riga di  $A$ .
- F V** b)  $T : \mathbf{R}[t] \rightarrow \mathbf{R}[t]$  definita da  $T(p) = p'$ , dove  $p'$  indica la derivata di  $p$ .
- F V** c)  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da  $T(x, y, z) = (x, y, 1)$ .
- F V** d)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $T(A) = \rho(A)$ , dove  $\rho(A)$  indica il rango di  $A$ .

9) Sia  $T : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare suriettiva.

- F V** a) Se  $u, v \in V$  sono linearmente indipendenti allora  $T(u)$  e  $T(v)$  sono linearmente indipendenti.
- F V** b) Se  $u, v \in V$  sono linearmente dipendenti allora  $T(u)$  e  $T(v)$  sono linearmente dipendenti.
- F V** c) Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  genera  $V$  allora  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  genera  $W$ .
- F V** d) Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  allora  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  è una base di  $W$ .

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La seguente struttura algebrica è un gruppo.

- F V** a)  $(\mathbf{R}, \cdot)$ .  
**F V** b)  $(\mathbf{R}[t], +)$ .  
**F V** c)  $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$ , dove  $GL_n(\mathbf{R})$  indica l'insieme delle matrici regolari di ordine  $n$ .  
**F V** d)  $(\mathbf{C}, +)$

2) Sia  $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbf{R})$  una matrice di rango 3. Allora

- F V** a) ogni minore di ordine 3 di  $A$  ha determinante diverso da 0.  
**F V** b) le righe di  $A$  sono linearmente indipendenti.  
**F V** c) lo spazio delle righe di  $A$  è  $\mathbf{R}^3$ .  
**F V** d) le colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti.

3) Sia  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  una matrice tale che  $\det A = 1$ . Allora

- F V** a)  $2A$  è regolare.  
**F V** b) esiste  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tale che  $BA = I_n$ .  
**F V** c)  $\det(A^2) = \det A$ .  
**F V** d)  ${}^t A$  è invertibile.

4) Un sistema lineare è impossibile se

- F V** a) la matrice completa è quadrata e ha determinante diverso da zero.  
**F V** b) il rango della matrice incompleta è uguale al numero delle variabili.  
**F V** c) non è omogeneo.  
**F V** d) ha meno incognite che equazioni.

5) Sia  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$  e sia  $B$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando la prima e l'ultima colonna e sommando alla seconda colonna la terza colonna moltiplicata per 2. Allora

- F V** a)  $\det A = -\det B$ .  
**F V** b) il sistema che ha  $A$  come matrice completa è equivalente a quello che ha  $B$  come matrice completa.  
**F V** c) lo spazio delle righe di  $A$  coincide con lo spazio delle righe di  $B$ .  
**F V** d) lo spazio delle colonne di  $A$  coincide con lo spazio delle colonne di  $B$ .

6) Il sottoinsieme  $W$  è un sottospazio dello spazio vettoriale  $V$ , con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, se

- F V** a)  $V$  è l'insieme dei vettori geometrici del piano applicati in un punto  $O$  e  $W$  è l'insieme dei vettori  $(O, P)$  tali che  $P = O$  oppure  $P$  appartiene ad una retta non passante per  $O$ .
- F V** b)  $V = \mathbf{R}^2$  e  $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .
- F V** c)  $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  e  $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \text{Tr}(A) = 0\}$ , dove  $\text{Tr}(A)$  indica la traccia di  $A$ .
- F V** d)  $V = \mathbf{R}[t]$  e  $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid p_{2k} = 0\} \cup \{p \in \mathbf{R}[t] \mid p_{2k+1} = 0\}$ , dove  $p_k$  indica il coefficiente del termine di grado  $k$ .

7) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $\mathbf{K}$ . Allora

- F V** a) ogni sottoinsieme di  $V$  che contiene  $n$  vettori è una base di  $V$ .
- F V** b) ogni sottoinsieme di  $V$  che contiene  $n + 1$  vettori è linearmente dipendente.
- F V** c) ogni sottoinsieme di  $V$  che contiene  $n + 1$  vettori è generatore di  $V$ .
- F V** d)  $V \cong \mathbf{K}^n$ .

8) È lineare la trasformazione

- F V** a)  $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $T(A) = \det A$ .
- F V** b)  $T : \mathbf{R}[t] \rightarrow \mathbf{R}[t]$  definita da  $T(p) = p^2$ .
- F V** c)  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ .
- F V** d)  $T : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  definita da  $T(A) = {}^t A - A$ .

9) Sia  $T : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare iniettiva.

- F V** a) Se  $u, v \in V$  sono linearmente indipendenti allora  $T(u)$  e  $T(v)$  sono linearmente indipendenti.
- F V** b) Se  $u, v \in V$  sono linearmente dipendenti allora  $T(u)$  e  $T(v)$  sono linearmente dipendenti.
- F V** c) Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  genera  $V$  allora  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  genera  $W$ .
- F V** d) Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  allora  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  è una base di  $W$ .