

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).

---

1) Sia  $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare simmetrica definita da

$$\phi((x, y, z), (x', y', z')) = (4\lambda + 7)xx' - 6xy' - 6yx' + 6zy' + 6yz' - 5zx' - 5xz' + 4yy' + (4\lambda + 3)zz'.$$

- Si determini la matrice di Gram associata a  $\phi$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, -1))$ .  
(3 punti)
- Si determinino le equazioni della forma quadratica associata a  $\phi$  e si dica per quali valori di  $\lambda$  è definita positiva. (3 punti)
- Fissato  $\lambda = 1$ , si determini una base per il complemento ortogonale di  $W = L((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ .  
(3 punti)

2) Sia  $S$  il sistema lineare nelle variabili  $x, y, z$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + \lambda y + z = -1 \\ 3x + 3y + z = -1 \\ (\lambda + 3)x + (\lambda + 3)y + 2z = -\frac{2}{3}\lambda \end{cases}$$

- Si discuta il sistema al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (3 punti)
  - Fissato  $\lambda = 3$ , sia  $\alpha$  il sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$  che ha  $S$  come rappresentazione cartesiana. Si determinino le equazioni cartesiane della retta  $r$  perpendicolare ad  $\alpha$  e passante per il punto  $Q = (1, 1, 1)$ . (3 punti)
  - Fissato  $\lambda = 0$ , sia  $P$  la soluzione di  $S$ . Si determini la distanza di  $P$  dal piano  $\pi$  di equazione  $x + y + z = 1$ . (3 punti)
-