

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La seguente struttura algebrica con le usuali operazioni di somma e prodotto è un anello unitario

- F V** a) $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.
F V b) $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$.
F V c) $(P, +, \cdot)$, dove P denota l'insieme dei numeri interi pari.
F V d) $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$.

2) Il rango di una matrice è h se

- F V** a) tutti i suoi minori di ordine maggiore di h sono singolari.
F V b) possiede esattamente h colonne linearmente indipendenti.
F V c) è ridotta a gradini per righe e ha esattamente h righe non nulle.
F V d) lo spazio generato dalle righe ha dimensione h .

3) Siano \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 due soluzioni distinte di un sistema lineare S . Allora

- F V** a) S è indeterminato.
F V b) $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad S .
F V c) $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ è soluzione di S .
F V d) la matrice dei coefficienti e la matrice completa di S hanno lo stesso rango.

4) In \mathbf{R}^3 si consideri il vettore $v = (-2, 2, -9)$ e la base ordinata $\mathcal{B} = ((2, 1, 1), (0, 0, 1), (0, -3, 9))$. Allora

- F V** a) $v \equiv_{\mathcal{B}} (-2, 2, -9)$.
F V b) esiste una base di \mathbf{R}^3 contenente v .
F V c) $v \in L((4, -4, 20), (1, 0, 0))$.
F V d) v è linearmente dipendente.

5) I seguenti spazi vettoriali reali sono isomorfi

- F V** a) \mathbf{C} e \mathbf{R}^2 .
F V b) $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}_{\leq 5}[t]$.
F V c) $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ e \mathbf{R}^4 .
F V d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0\}$ e $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0\}$.

6) Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $v, w \in V$ due vettori distinti e non nulli tali che $T(v) = T(w) = 2w$. Allora

- F V** a) T è semplice.
F V b) T ha solo l'autovalore 2.
F V c) v è autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) $v - w$ è autovettore relativo all'autovalore 0.

7) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $W \subseteq V$ un sottospazio.

- F V** a) Se $v \in V$ è ortogonale ai vettori di una base di W allora $v \in {}^\perp W$.
F V b) ${}^\perp({}^\perp W) = W$.
F V c) Se V è finitamente generato allora $V = {}^\perp W \oplus W$.
F V d) Allora ${}^\perp V = \{0_V\}$.

8) In \mathbf{R}^3 con il prodotto scalare standard si consideri la retta r avente come coefficienti direttori $(1, 1, 1)$ e passante per il punto $(2, -1, 3)$. Allora

- F V** a) il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ è ortogonale a r .
F V b) la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$ è parallela a r .
F V c) la retta r passa per il punto $(0, 0, 0)$.
F V d) la retta r è incidente al piano $x = 0$.

9) Una matrice simmetrica di ordine n a coefficienti in \mathbf{R} è definita negativa se

- F V** a) è congruente a $-I_n$.
F V b) ha rango massimo.
F V c) ha indice di positività uguale a zero.
F V d) ha determinante negativo.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) In \mathbf{R}^3 con il prodotto scalare standard si consideri la retta r avente come coefficienti direttori $(1, 1, 1)$ e passante per il punto $(2, -1, 3)$. Allora

F V a) il piano di equazione cartesiana $x + y + z = 0$ è ortogonale a r .

F V b) la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$ è parallela a r .

F V c) la retta r passa per il punto $(0, 0, 0)$.

F V d) la retta r è incidente al piano $x = 0$.

2) Siano \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 due soluzioni distinte di un sistema lineare S . Allora

F V a) S è indeterminato.

F V b) $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad S .

F V c) $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ è soluzione di S .

F V d) la matrice dei coefficienti e la matrice completa di S hanno lo stesso rango.

3) La seguente struttura algebrica con le usuali operazioni di somma e prodotto è un anello unitario

F V a) $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$.

F V b) $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$.

F V c) $(P, +, \cdot)$, dove P denota l'insieme dei numeri interi pari.

F V d) $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$.

4) Il rango di una matrice è h se

F V a) tutti i suoi minori di ordine maggiore di h sono singolari.

F V b) possiede h colonne linearmente indipendenti.

F V c) è ridotta a gradini per righe e ha esattamente h righe non nulle.

F V d) lo spazio generato dalle righe ha dimensione h .

5) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $W \subseteq V$ un sottospazio.

F V a) Se $v \in V$ è ortogonale ai vettori di una base di W allora $v \in {}^\perp W$.

F V b) ${}^\perp({}^\perp W) = W$.

F V c) Se V è finitamente generato allora $V = {}^\perp W \oplus W$.

F V d) Allora ${}^\perp V = \{0_V\}$.

6) Una matrice simmetrica di ordine n a coefficienti in \mathbf{R} è definita negativa se

F V a) è congruente a $-I_n$.

F V b) ha rango massimo.

F V c) ha indice di positività uguale a zero.

F V d) ha determinante negativo.

7) Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $v, w \in V$ tali che $T(v) = T(w) = 2w$. Allora

- F V** a) T è semplice.
F V b) T ha solo l'autovalore 2.
F V c) v è autovettore relativo all'autovalore 2.
F V d) $v - w$ è autovettore relativo all'autovalore 0.

8) Le seguenti coppie di spazi vettoriali reali sono isomorfi

- F V** a) \mathbf{C} e \mathbf{R}^2 .
F V b) $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}_{\leq 5}[t]$.
F V c) $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ e \mathbf{R}^4 .
F V d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0\}$ e $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0\}$.

9) In \mathbf{R}^3 si consideri il vettore $v = (-2, 2, -9)$ e la base ordinata $\mathcal{B} = ((2, 1, 1), (0, 0, 1), (0, -3, 9))$. Allora

- F V** a) $v \equiv_{\mathcal{B}} (-2, 2, -9)$.
F V b) esiste una base di \mathbf{R}^3 contenente v .
F V c) $v \in L((4, -4, 20), (1, 0, 0))$.
F V d) v è linearmente dipendente.