

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di $1/2$ punto se l'indicazione è esatta, $-1/2$ punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Siano A e B due matrici tali che la coppia (A, B) sia conformabile.

- F V** a) Allora la coppia $({}^tB, {}^tA)$ è conformabile.
F V b) Allora la coppia (B, A) è conformabile.
F V c) Se la coppia (B, A) è conformabile allora A e B sono quadrate dello stesso ordine.
F V d) Se è possibile sommare A e B allora A e B sono quadrate dello stesso ordine.

2) Sia S un sistema lineare avente almeno due soluzioni distinte tra cui quella banale. Allora

- F V** a) S è indeterminato.
F V b) il rango della matrice incompleta associata a S è uguale al rango della matrice completa associata a S .
F V c) l'insieme delle soluzioni di S è uno spazio vettoriale.
F V d) S è un sistema di Cramer.

3) Siano W e U due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V .

- F V** a) Se $\dim W = \dim U$ allora $W = U$.
F V b) Allora $U \cap W$ contiene almeno un vettore.
F V c) Se $\dim U + \dim W > \dim V$ allora $U \cap W$ contiene almeno un vettore non nullo.
F V d) Se $v \in U \cap W$ allora $-v \in U \cap W$.

4) La seguente trasformazione è lineare.

- F V** a) $T : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ definita da $T(A) = \det A$.
F V b) $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $T(x) = e^x$.
F V c) $T : \mathbf{K}[t] \rightarrow \mathbf{K}$ definita da $T(\sum_{i=0}^n a_i t^i) = \sum_{i=0}^n a_i$.
F V d) $T : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$ definita da $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$.

5) Sia $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo e sia λ un autovalore di T .

- F V** a) Allora esiste $v \in V$ non nullo tale che $T(v) = \lambda v$.
F V b) Allora esiste una base spettrale per V relativa a T .
F V c) Se A è una matrice associata a T rispetto ad una base \mathcal{B} di V e $\dim V = n$ allora $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
F V d) Se T è invertibile allora $\lambda \neq 0$.

6) Date due rette in uno spazio affine \mathcal{A} , esiste un unico piano che contiene entrambe se

- F V** a) sono parallele e distinte.
F V b) sono incidenti e distinte.
F V c) sono sghembe.
F V d) sono coincidenti.

7) In uno spazio euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, sia α un sottospazio euclideo di dimensione k e sia $v \in \vec{\alpha}$ un vettore non nullo.

F V a) Allora esistono $k + 1$ punti affinementemente indipendenti appartenenti ad α .

F V b) Allora esiste una base ortogonale per $\vec{\alpha}$ che contiene v .

F V c) Se α è un iperpiano e r è una retta ortogonale ad α allora $v \in \vec{r}^\perp$.

F V d) Se $P \in \mathcal{E}$ è un punto tale che $d(P, \alpha) = 0$ allora $P \in \alpha$.

8) La seguente è una base dello spazio delle matrici triangolari alte di ordine 2.

F V a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

F V b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

F V c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

F V d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

9) Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica.

F V a) Se ϕ è definita positiva allora $\phi(v, w) > 0$, per ogni $v, w \in V$.

F V b) Se esiste $v \in V$ tale che $\phi(v, v) > 0$ allora ϕ non è definita negativa.

F V c) Se ϕ ha segnatura (h, k) allora $\dim V \geq h + k$.

F V d) Allora $\phi(v, w) = \phi(w, v)$ per ogni $v, w \in V$.