

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Sia A una matrice ridotta a gradini per righe.

- F V** a) Se A è quadrata, allora il determinante di A è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.
- F V** b) Il rango di A è il numero di righe non nulle.
- F V** c) Se A ha un pivot su ogni colonna, un qualsiasi sistema che ha A come matrice completa è impossibile.
- F V** d) Se A ha un pivot su ogni riga, un qualsiasi sistema che ha A come matrice dei coefficienti è determinato.

2) Sia A una matrice ortogonale di ordine n . Allora

- F V** a) il determinante di A è uguale a 1.
- F V** b) A ha rango massimo.
- F V** c) ${}^tA \cdot A = I_n$.
- F V** d) $\sum_{i=1}^n \|a^i\| = n$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma associata al prodotto scalare standard di \mathbf{R}^n .

3) Il sottoinsieme W è un sottospazio dello spazio vettoriale V (con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare).

- F V** a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 - y^2 = z\}$, $V = \mathbf{R}^3$.
- F V** b) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$, $V = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- F V** c) $W = \{p \in \mathbf{R}[t] \mid \deg p \geq 3\}$, $V = \mathbf{R}[t]$.
- F V** d) $W = \{v \in \mathcal{F}(O) \mid v \text{ ha lunghezza minore o uguale a } 2\}$, $V = \mathcal{F}(O)$ (vettori dello spazio applicati in O).

4) Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo e siano $v_1, v_2 \in V$ e $w_1, w_2 \in W$.

- F V** a) Se v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti allora esiste una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.
- F V** b) Se $v_1 \neq 0_V$ e $w_1 = 0_W$ allora non esiste una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.
- F V** c) Se $\{w_1, w_2\}$ è una base di W allora esiste un'unica trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.
- F V** d) Se $v_1 = 0_V$ e $w_1 \neq 0_W$ allora non esiste una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ tale che $T(v_i) = w_i$, per $i = 1, 2$.

- 5) Sia $\mathcal{F}(O)$ lo spazio vettoriale dei vettori dello spazio applicati in O , sia α l'insieme dei vettori contenuti in un piano α passante per O e sia $\pi : \mathcal{F}(O) \rightarrow \mathcal{F}(O)$ l'endomorfismo che associa ad un vettore la sua proiezione ortogonale su α . Allora

- F V** a) $\mathcal{F}(O)$ è uguale alla somma diretta degli autospazi di π .
F V b) ogni matrice associata a π è diagonalizzabile per similitudine.
F V c) gli autovalori di π sono 0 e 1.
F V d) ogni vettore di α è autovettore di π .

- 6) Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ e sia $B = 2A$. Allora A e B

- F V** a) sono simili e congruenti.
F V b) non sono nè simili nè congruenti.
F V c) sono simili, ma non congruenti.
F V d) sono congruenti, ma non simili.

- 7) In uno spazio affine di dimensione almeno tre, esiste un'unica retta che

- F V** a) passa per due punti distinti.
F V b) è contenuta in due piani fissati.
F V c) è parallela ad una retta fissata.
F V d) è sghemba con una retta fissata.

- 8) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

- F V** a) Allora $\langle v, v \rangle > 0$, per ogni $v \in V$ non nullo.
F V b) Allora ${}^\perp V = \{0_V\}$.
F V c) Se $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle = 1$ allora $\langle v_1 + v_2, w \rangle = 2$.
F V d) Allora ${}^\perp X$ è un sottospazio vettoriale di V per ogni sottoinsieme X di V .

- 9) Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ una matrice definita negativa.

- F V** a) Allora A è congruente a $-I_n$.
F V b) Se $\phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ ha A come matrice di Gram allora $\phi(v, v) < 0$ per ogni $v \in V$ non nullo.
F V c) Il determinante di A è negativo.
F V d) Gli elementi sulla diagonale principale di A sono negativi.