

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di  $1/2$  punto se l'indicazione è esatta,  $-1/2$  punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La struttura algebrica  $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$

- F** **V** a) è un anello.  
**F** **V** b) è un campo.  
**F** **V** c) ha zero divisori.  
**F** **V** d) ha infiniti elementi invertibili.

2) Sia  $(A, B)$  una coppia di matrici conformabili (cioè per cui definito il prodotto righe per colonne di  $A$  per  $B$ ). Allora

- F** **V** a) la coppia  $({}^tA, {}^tB)$  è conformabile.  
**F** **V** b) la coppia  $({}^tA, B)$  è conformabile.  
**F** **V** c) il numero di colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  $B$ .  
**F** **V** d) la coppia  $(AB, B)$  è conformabile.

3) Siano  $A$  e  $C$ , rispettivamente, la matrice incompleta e completa di un sistema impossibile con 10 equazioni e 9 incognite. Allora

- F** **V** a)  $\det(C) \neq 0$ .  
**F** **V** b) le righe di  $A$  sono linearmente dipendenti.  
**F** **V** c) le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti.  
**F** **V** d)  $\rho(A) < \rho(C)$ .

4) In uno spazio vettoriale reale  $V$  siano  $v_1, v_2, v_3$  tre vettori distinti e sia  $W = L(v_1, v_2, v_3)$ . Allora

- F** **V** a)  $v_1 - v_2 + \sqrt{2}v_3 \in W$ .  
**F** **V** b)  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base di  $W$ .  
**F** **V** c)  $\{v_1 - v_2, v_2, v_3\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .  
**F** **V** d)  $\{v_1, v_2, v_3, v_1 - v_2\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .

5) Sia  $T : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare che ha  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$  come matrice associata. Allora

- F** **V** a)  $T$  è iniettiva.  
**F** **V** b)  $T$  è suriettiva.  
**F** **V** c)  $\dim V = 3$ .  
**F** **V** d)  $\dim(\text{Im } T) = 1$ .

- 6) Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'endomorfismo definito da  $T(3, 1, 1) = (6, 2, 2)$ ,  $T(1, 3, 1) = (-1, -3, -1)$  e  $T(-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$ . Allora

- F V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** b)  $-1$  è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** c)  $(-3, -1, -1)$  è un autovettore relativo all'autovalore 2.  
**F V** d)  $\mathbf{R}^3$  ammette una base spettrale relativa a  $T$ .

- 7) In  $\mathbf{R}^5$  con il prodotto scalare standard sia  $U$  il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

- F V** a) Allora  $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$  è una base di  ${}^\perp U$ .  
**F V** b) Allora  $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$ .  
**F V** c) Allora  $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$ .  
**F V** d) Se  $v \in U$  e  $w \in {}^\perp U$  sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

- 8) Sia  $\mathcal{A}$  uno spazio affine di dimensione 6 e sia  $U$  un suo sottospazio affine di dimensione 2.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di  $\mathcal{A}$  parallelo ad  $U$  ha dimensione almeno 2.  
**F V** b) Esiste una rappresentazione cartesiana per  $U$  avente 2 equazioni.  
**F V** c) Ogni sottospazio affine di  $\mathcal{A}$  che ha almeno 3 punti in comune con  $U$  coincide con  $U$ .  
**F V** d) La giacitura di  $U$  contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

- 9) Siano  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  due matrici a coefficienti reali.

- F V** a)  $B$  è non definita.  
**F V** b)  $A$  e  $B$  sono congruenti.  
**F V** c)  $A$  è diagonalizzabile per congruenza.  
**F V** d)  $B$  è diagonalizzabile per similitudine.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di  $1/2$  punto se l'indicazione è esatta,  $-1/2$  punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) La struttura algebrica  $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$

- F** **V** a) è un anello.
- F** **V** b) è un campo.
- F** **V** c) ha zero divisori.
- F** **V** d) ha infiniti elementi invertibili.

2) Sia  $(B, A)$  una coppia di matrici conformabili (cioè per cui definito il prodotto righe per colonne di  $B$  per  $A$ ). Allora

- F** **V** a) la coppia  $({}^tA, {}^tB)$  è conformabile.
- F** **V** b) la coppia  $({}^tB, A)$  è conformabile.
- F** **V** c) il numero di colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  $B$ .
- F** **V** d) la coppia  $(BA, B)$  è conformabile.

3) Siano  $A$  e  $C$ , rispettivamente, la matrice incompleta e completa di un sistema indeterminato con 10 equazioni e 9 incognite. Allora

- F** **V** a)  $\det(C) \neq 0$ .
- F** **V** b) le righe di  $A$  sono linearmente dipendenti.
- F** **V** c) le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti.
- F** **V** d)  $\rho(A) < \rho(C)$ .

4) In uno spazio vettoriale reale  $V$  siano  $v_1, v_2, v_3$  tre vettori linearmente indipendenti e sia  $W = L(v_1, v_2, v_3)$ . Allora

- F** **V** a)  $\sqrt{7}v_1 - v_2 + v_3 \in W$ .
- F** **V** b)  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base di  $W$ .
- F** **V** c)  $\{v_1, v_2 + v_3, v_3\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .
- F** **V** d)  $\{v_1, v_2, v_3, v_2 + v_3\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .

5) Sia  $T : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare che ha  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  come matrice associata. Allora

- F** **V** a)  $T$  è iniettiva.
- F** **V** b)  $T$  è suriettiva.
- F** **V** c)  $\dim V = 3$ .
- F** **V** d)  $\dim(\text{Im } T) = 1$ .

- 6) Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'endomorfismo definito da  $T(1, 1, 3) = (-1, -1, -3)$ ,  $T(2, 1, 1) = (4, 2, 2)$  e  $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$ . Allora

- F V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** b)  $-1$  è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** c)  $(-2, -1, -1)$  è un autovettore relativo all'autovalore 2.  
**F V** d)  $\mathbf{R}^3$  ammette una base spettrale relativa a  $T$ .

- 7) In  $\mathbf{R}^5$  con il prodotto scalare standard sia  $U$  il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

- F V** a) Allora  $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$  è una base di  ${}^\perp U$ .  
**F V** b) Allora  $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$ .  
**F V** c) Allora  $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$ .  
**F V** d) Se  $v \in U$  e  $w \in {}^\perp U$  sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

- 8) Sia  $\mathcal{A}$  uno spazio affine di dimensione 6 e sia  $U$  un suo sottospazio affine di dimensione 4.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di  $\mathcal{A}$  parallelo a  $U$  ha dimensione 4.  
**F V** b) Esiste una rappresentazione cartesiana per  $U$  avente 2 equazioni.  
**F V** c) Ogni sottospazio affine di  $U$  che ha almeno 3 punti in comune con  $U$  coincide con  $U$ .  
**F V** d) La giacitura di  $U$  contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

- 9) Siano  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  due matrici a coefficienti reali.

- F V** a)  $A$  è non definita.  
**F V** b)  $A$  e  $B$  sono congruenti.  
**F V** c)  $A$  è diagonalizzabile per congruenza.  
**F V** d)  $B$  è diagonalizzabili per similitudine.

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di  $1/2$  punto se l'indicazione è esatta,  $-1/2$  punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

- 1) Siano  $A$  e  $C$ , rispettivamente, la matrice incompleta e completa di un sistema impossibile con 10 equazioni e 9 incognite. Allora

- F V** a)  $\det(C) \neq 0$ .  
**F V** b) le righe di  $A$  sono linearmente dipendenti.  
**F V** c)  $\rho(A) < \rho(C)$ .  
**F V** d) le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti.

- 2) La struttura algebrica  $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$

- F V** a) ha infiniti elementi invertibili.  
**F V** b) è un campo.  
**F V** c) ha zero divisori.  
**F V** d) è un anello.

- 3) Siano  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  due matrici a coefficienti reali.

- F V** a)  $B$  è diagonalizzabile per similitudine.  
**F V** b)  $A$  e  $B$  sono congruenti.  
**F V** c)  $A$  è diagonalizzabile per congruenza.  
**F V** d)  $B$  è non definita.

- 4) In  $\mathbf{R}^5$  con il prodotto scalare standard sia  $U$  il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

- F V** a) Allora  $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$ .  
**F V** b) Allora  $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$  è una base di  ${}^\perp U$ .  
**F V** c) Allora  $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$ .  
**F V** d) Se  $v \in U$  e  $w \in {}^\perp U$  sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

- 5) Sia  $T : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare che ha  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$  come matrice associata. Allora

- F V** a)  $\dim(\text{Im } T) = 1$ .  
**F V** b)  $T$  è suriettiva.  
**F V** c)  $\dim V = 3$ .  
**F V** d)  $T$  è iniettiva.

6) Sia  $(A, B)$  una coppia di matrici conformabili (cioè per cui definito il prodotto righe per colonne di  $A$  per  $B$ ). Allora

- F V** a) la coppia  $(AB, B)$  è conformabile.  
**F V** b) la coppia  $({}^tA, B)$  è conformabile.  
**F V** c) il numero di colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  $B$ .  
**F V** d) la coppia  $({}^tA, {}^tB)$  è conformabile.

7) In uno spazio vettoriale reale  $V$  siano  $v_1, v_2, v_3$  tre vettori distinti e sia  $W = L(v_1, v_2, v_3)$ . Allora

- F V** a)  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base di  $W$ .  
**F V** b)  $v_1 - v_2 + \sqrt{2}v_3 \in W$ .  
**F V** c)  $\{v_1 - v_2, v_2, v_3\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .  
**F V** d)  $\{v_1, v_2, v_3, v_1 - v_2\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .

8) Sia  $\mathcal{A}$  uno spazio affine di dimensione 6 e sia  $U$  un suo sottospazio affine di dimensione 2.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di  $\mathcal{A}$  parallelo ad  $U$  ha dimensione almeno 2.  
**F V** b) Esiste una rappresentazione cartesiana per  $U$  avente 2 equazioni.  
**F V** c) Ogni sottospazio affine di  $\mathcal{A}$  che ha almeno 3 punti in comune con  $U$  coincide con  $U$ .  
**F V** d) La giacitura di  $U$  contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.

9) Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'endomorfismo definito da  $T(3, 1, 1) = (6, 2, 2)$ ,  $T(1, 3, 1) = (-1, -3, -1)$  e  $T(-1, 1, 1) = (-2, 2, 2)$ . Allora

- F V** a) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** b)  $-1$  è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** c)  $(-3, -1, -1)$  è un autovettore relativo all'autovalore 2.  
**F V** d)  $\mathbf{R}^3$  ammette una base spettrale relativa a  $T$ .

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di  $1/2$  punto se l'indicazione è esatta,  $-1/2$  punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora

1) Siano  $A$  e  $C$ , rispettivamente, la matrice incompleta e completa di un sistema indeterminato con 10 equazioni e 9 incognite. Allora

- F V** a) le righe di  $A$  sono linearmente dipendenti.  
**F V** b)  $\det(C) \neq 0$ .  
**F V** c) le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti.  
**F V** d)  $\rho(A) < \rho(C)$ .

2) Sia  $T : V \rightarrow W$  una trasformazione lineare che ha  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  come matrice associata. Allora

- F V** a)  $\dim V = 3$ .  
**F V** b)  $T$  è suriettiva.  
**F V** c)  $T$  è iniettiva.  
**F V** d)  $\dim(\text{Im } T) = 1$ .

3) In  $\mathbf{R}^5$  con il prodotto scalare standard sia  $U$  il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

- F V** a) Allora  $\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1)\}$  è una base di  ${}^\perp U$ .  
**F V** b) Allora  $\{(1, -1, 0, -1, 0)\} \in {}^\perp U$ .  
**F V** c) Allora  $\mathbf{R}^5 = {}^\perp U \oplus U$ .  
**F V** d) Se  $v \in U$  e  $w \in {}^\perp U$  sono due vettori non nulli allora sono linearmente indipendenti.

4) Siano  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  due matrici a coefficienti reali.

- F V** a)  $B$  è diagonalizzabili per similitudine.  
**F V** b)  $A$  e  $B$  sono congruenti.  
**F V** c)  $A$  è diagonalizzabile per congruenza.  
**F V** d)  $A$  è non definita.

5) Sia  $\mathcal{A}$  uno spazio affine di dimensione 6 e sia  $U$  un suo sottospazio affine di dimensione 4.

- F V** a) Ogni sottospazio affine di  $\mathcal{A}$  parallelo a  $U$  ha dimensione 4.  
**F V** b) Esiste una rappresentazione cartesiana per  $U$  avente 2 equazioni.  
**F V** c) La giacitura di  $U$  contiene quattro vettori liberi linearmente indipendenti.  
**F V** d) Ogni sottospazio affine di  $U$  che ha almeno 3 punti in comune con  $U$  coincide con  $U$ .

6) In uno spazio vettoriale reale  $V$  siano  $v_1, v_2, v_3$  tre vettori linearmente indipendenti e sia  $W = L(v_1, v_2, v_3)$ . Allora

- F V** a)  $\{v_1, v_2 + v_3, v_3\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .  
**F V** b)  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base di  $W$ .  
**F V** c)  $\sqrt{7}v_1 - v_2 + v_3 \in W$ .  
**F V** d)  $\{v_1, v_2, v_3, v_2 + v_3\}$  è un insieme di generatori per  $W$ .

7) Sia  $(B, A)$  una coppia di matrici conformabili (cioè per cui definito il prodotto righe per colonne di  $B$  per  $A$ ). Allora

- F V** a) la coppia  $({}^tB, A)$  è conformabile.  
**F V** b) la coppia  $({}^tA, {}^tB)$  è conformabile.  
**F V** c) il numero di colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  $B$ .  
**F V** d) la coppia  $(BA, B)$  è conformabile.

8) La struttura algebrica  $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$

- F V** a) ha zero divisori.  
**F V** b) è un campo.  
**F V** c) è un anello.  
**F V** d) ha infiniti elementi invertibili.

9) Sia  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'endomorfismo definito da  $T(1, 1, 3) = (-1, -1, -3)$ ,  $T(2, 1, 1) = (4, 2, 2)$  e  $T(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$ . Allora

- F V** a)  $\mathbf{R}^3$  ammette una base spettrale relativa a  $T$ .  
**F V** b)  $-1$  è autovalore con molteplicità geometrica 2.  
**F V** c)  $(-2, -1, -1)$  è un autovettore relativo all'autovalore 2.  
**F V** d) 2 è autovalore con molteplicità geometrica 2.