29 Gennaio 2013 **N. Matr.** ....

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, indicando le MOTIVAZIONI dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango). Non sarà assegnato alcun punteggio agli esercizi in cui viene indicata solo la risposta o il risultato finale.

---

1) Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base ordinata dello spazio vettoriale reale V e sia $T : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$T(v_1) = -v_1 \qquad T(v_2) = -v_1 + v_2 - 2v_3 \qquad T(v_3) = -2v_1 + v_2 - 2v_3.$$

a) Si dica se T è un isomorfismo. *(3 punti)*

b) Si dica se esiste una base spettrale per T. *(3 punti)*

c) Fissato $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$, sia $w = (2,1,3)$. Si determini $T(w)$. *(3 punti)*

2) In $\mathbb{R}^3$ si considerino

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2 \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \pi : \ x + y + z = 2.$$

a) Si determini il piano passante per r e parallelo a π. *(3 punti)*

b) Si determini la distanza tra r e π. *(3 punti)*

c) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la traslazione definita da $F(x,y,z) = (x,y,z) + (1,1,1)$. Si determinino equazioni parametriche per la retta $r' = F(r)$. *(3 punti)*

1a) $T(v_1) = -v_1 \equiv_{\mathcal{B}} (-1,0,0)$ $\quad T(v_2) = -v_1 + v_2 - 2v_3 \equiv_{\mathcal{B}} (-1,1,-2)$

$T(v_3) = -2v_1 + v_2 - 2v_3 \equiv_{\mathcal{B}} (-2,1,-2)$

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det M_{\mathcal{B}}(T) = 0$ la III riga e' $-2 \cdot$ la II riga

$\Longrightarrow$ $\boxed{T \text{ non e' un isomorfismo}}$

1b) Sia $A = M_{\mathcal{B}}(T)$

$$\Delta_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & 2 & t+2 \end{pmatrix} = (t+1) \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 2 & t+2 \end{pmatrix} =$$

$$= (t+1)\big((t-1)(t+2)+2\big) = (t+1)(t^2+t) = t(t+1)^2 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow t = 0 \\ \searrow t = -1 \end{array}$$

$$mg(-1) = 3 - \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \Longrightarrow mg(-1) = 1 < 2 = ma(-1)$$

$\det \neq 0$

$\Longrightarrow$ non esiste una base spettrale

1c) $(2,1,3) = a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,0,1)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = 1 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow (2,1,3) = (1,1,1) + (1,0,1) + (0,0,1)$ $\quad \Longrightarrow$

$T(2,1,3) = T(1,1,1) + T(1,0,1) + T(0,0,1) = -v_1 - v_1 + v_2 - 2v_3 - 2v_1 + v_2 - 2v_3 =$
$= -4v_1 + 2v_2 - 4v_3 = (-4,-4,-4) + (2,0,2) - (0,0,4) = (-2,-4,-6)$

$$\boxed{T(2,1,3) = (-2,-4,-6)}$$

2a) $\begin{cases} x-2=t \\ y=-2 \\ z=-x+2+4 \end{cases}$ $\quad r: \begin{cases} y=-2 \\ z+x-6=0 \end{cases}$ $\quad$ direzione $\perp$ a π e' $(1,1,1)$

$\alpha(y+2) + \beta(z+x-6) = 0 \qquad \underbrace{\beta x + \alpha y + \beta z - 6\beta + 2\alpha = 0}_{\text{fascio per } r}$

direzione $\perp$ $(\beta, \alpha, \beta) = \rho(1,1,1) \Rightarrow \alpha = \beta = 1$

$$\Rightarrow \boxed{x+y+z-4=0}$$

2b) $r \parallel \pi$ infatti $\langle \underbrace{(1,0,-1)}_{\text{vettore di direzione di } r}, (1,1,1) \rangle = 0 \Rightarrow d(r,\pi) = d(P,\pi)$ con $P \in r$

$$P=(2,-2,4) \Rightarrow d(r,\pi) = \frac{|2-2+4-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

2c) $P=(2,-2,4) \in r \quad Q=(3,-2,3) \in r \ (t=1)$

$F(P) = (2,-2,4) + (1,1,1) = (3,-1,5) \quad F(Q) = (3,-2,3) + (1,1,1) = (4,-1,4)$

$F(r)$ è la retta per $F(P)$ e $F(Q)$ $\quad F(P) - F(Q) = (-1,0,1)$

$$\begin{cases} x = 3-t \\ y = -1 \\ z = 5+t \end{cases}$$