

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, indicando le MOTIVAZIONI dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango). Non sarà assegnato alcun punteggio agli esercizi in cui viene indicata solo la risposta o il risultato finale.

1) Si consideri il sistema lineare nelle variabili x, y, z, t reali S :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x - y - z = -a \\ x - y + z = 1 \\ x + z = a \end{cases}$$

- a) Si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ il sistema è impossibile. (3 punti)
 b) Sia A la matrice incompleta associata ad S . Si determini una base per lo spazio delle righe di A e una per lo spazio delle colonne. (3 punti)
 c) Sia r la retta rappresentata dalla prima e dalla terza equazione di S e t la retta rappresentata dalla seconda e dalla quarta equazione di S . Fissato $a = 0$, si determini la posizione reciproca di r e t e la loro distanza. (4 punti)

2) Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Si determinino gli autovalori di A e, se esiste, una matrice diagonale simile ad A . (4 punti)
 b) Sia $B = {}^t A \cdot A$. Si determini la segnatura e la forma canonica per congruenza di B . (4 punti)

1) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & -1 & -1 & | & -a \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2: 2+2+2 \\ 3: 2-2-2 \\ 4: 2-2-2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2-a \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2-a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho(A) = 2 \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \rho(C) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-a=0 \\ 2-a=1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ MAI

$\Rightarrow \boxed{\forall a \in \mathbb{R} \text{ il sistema è impossibile}}$

b) $\rho(A) = 2 \Rightarrow \dim(\text{spazio righe}) = \dim(\text{spazio colonne}) = 2$
 base dello spazio righe è $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ sono l.i.
 base dello spazio delle colonne è $\{(1, -1, 1), (1, -1, -1, 0)\}$ sono l.i.

c) $\rho(A) = 2 \Rightarrow \boxed{r \text{ e } t \text{ sono parallele e distinte}}$
 $\rho(C) = 3$

$r \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

$t \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

$P = (0, 0, 0) \in t$

calcolo il piano ortogonale a π passante per P

$$\vec{r} \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} x=d \\ y=0 \\ z=-d \end{cases} \quad (1,0,-1) \in \vec{r}$$

$$\pi: 1 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z = 0 \rightarrow x - z = 0$$

$$r \cap \pi \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2z = 3 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 3 \\ x = 3/4 \\ z = 3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3/4 + 3/4 - 1 = 1/2 \\ x = 3/4 \\ z = 3/4 \end{cases} \quad r \cap \pi = Q = (3/4, 1/2, 3/4)$$

$$d(r, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

2) a)

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ +1 & t-1 & -1 \\ -2 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-3)(t-1)(t-2) + 1 - 2(t-1) - (t-3) =$$

$$= (t-3)(t^2-3t+2) + 1 - 2t + 2 - t + 3 = t^3 - 6t^2 + 11t - 6 + 6 - 3t =$$

$$= t^3 - 6t^2 + 8t = 0 \quad t(t^2 - 6t + 8) = 0$$

$$t=0 \quad t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t = 3 \pm \sqrt{9-8} < \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{\text{Spec}(A) = \{0, 2, 4\}}$$

$$\begin{array}{l} \text{Diagonale simile} \\ \text{ad } A \text{ e } e' \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3 autovalori distinti
 $\Rightarrow$ diagonalizzabile per similitudine.

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} = B$$

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} t-14 & -1 & -6 \\ -1 & t-2 & -3 \\ -6 & -3 & t-6 \end{vmatrix} = (t-14)(t-2)(t-6) - 18 - 18 - 36(t-2) - 9(t-14) - (t-6) =$$

$$= (t-14)(t^2-8t+12) - 36 - 36t + 72 - 9t + 126 - t + 6 =$$

$$= t^3 - 22t^2 + 126t - 168 + 168 - 46t = t^3 - 22t^2 + 78t$$

$$2 \text{ variazioni} \Rightarrow i_+(B) = 2$$

$$\det B = 0 \Rightarrow p(B) = 2 \text{ (b1 e b2 l.i.)}$$

$$\Rightarrow i_-(B) = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{segna-tura di } B \text{ è } \boxed{(2,0)} \text{ e}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{forma} \\ \text{canonica} \\ \text{per} \end{array}$$