Esercizi di Geometria – seconda parte

22) Si consideri la matrice a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Si trovino gli autovalori di A.

b) Si dica se A è diagonalizzabile per similitudine.

23) Si considerino le matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A.

b) Si dica per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice B è simile ad A.

c) Si dica per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice B è congruente ad A.

d) Sia $\gamma = 0$. Quante sono le matrici diagonali simili a B? E quelle congruenti a B?

24) Sia data la matrice a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si calcoli il rango di A al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) Si calcoli l'indice di positività di A al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

25) Si consideri la matrice a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Si calcoli il rango di A al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) Si dica per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita positiva.

c) Si dica per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita negativa.

26) Si consideri la forma quadratica reale $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$q(x, y, z) = \lambda x^2 + \lambda y^2 + (\lambda - 2)z^2 + 2xy.$$

a) Si trovi per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la forma quadratica q è definita positiva e per quali è definita negativa.

b) Fissato $\lambda = 0$ si trovi la forma polare di q e la forma canonica di q.

27) Sia $f_\delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica definita da

$$f_\delta((x, y), (x', y')) = (x, y) \begin{pmatrix} 1+\delta & 10 \\ 10 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

a) Si trovino, se esistono, tutti i valori di $\delta \in \mathbb{R}$ tali che la forma quadratica associata a f_δ sia definita negativa.

b) Fissato $\delta = 10$, si trovi una base di $\mathbb{R}^2$ ortonormale rispetto al prodotto scalare definito da f_{10}.

28) In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio U di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 10x-z=0 \end{cases}$.

a) Si calcoli una base $\mathcal{B}$ per U.

b) Si ortonormalizzi $\mathcal{B}$.

c) Si scriva una base per il complemento ortogonale di U.

29) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, sia $v = (0,3,1)$ e sia W il sottospazio di equazione cartesiana $10x-y+2z = 0$. Si trovi la proiezione ortogonale di v su W e quella su $W^\perp$.

30) Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, le rette r ed s di equazioni, rispettivamente,

$$r : \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-z=2 \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{4}.$$

a) Si trovi il piano Π contenente r e parallelo ad s.

b) Si determinino un punto arbitrario su r ed uno su s.

31) In uno spazio euclideo tridimensionale, siano dati, rispetto ad un riferimento cartesiano, la retta r di equazioni,

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

il piano Π di equazione

$$x - y + z + 1 = 0$$

ed il punto $A \equiv (1,0,0)$.

a) Si trovino le equazioni parametriche della retta perpendicolare a Π e passante per A.

b) Si trovino le equazioni cartesiane del piano contenente la retta r e passante per A.

32) Siano date, nello spazio euclideo standard tridimensionale, il piano Π di equazione $x+y+z=0$ e la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 3x-y-9=0 \\ z+2=0. \end{cases}$$

a) Si determini l'equazione del fascio di piani per r.

b) Si trovi l'equazione del piano Π' contenente r e ortogonale a Π.

c) Si trovino le equazioni della retta r' ortogonale a Π e passante per il punto $P = (2, 0, 1)$.

33) Date le due rette in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad , \quad r_2 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta s che

– interseca r_1 e r_2

– passa per il punto $P = (0, 1, 1)$

34) Siano $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (-1, 1, 1)$ tre punti dello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

a) Si dimostri che A, B e C non sono allineati.

b) Si scrivano le equazioni cartesiane del piano π passante per i tre punti.

c) Si trovi il punto $D \in \pi$ tale che $ABDC$ sia un parallelogramma (con A e D vertici opposti)

35) Siano dati in $\mathbb{R}^3$ il punto $P = (-2, 4, 1)$, il piano $\pi : y - z = -1$ e la retta di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 2\alpha + 3 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Trovare la proiezione ortogonale di P su r.

b) Trovare la proiezione ortogonale di P su π.

c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta proiettando r ortogonalmente su π.

36) Siano dati, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il piano $\pi : -2\lambda x + \lambda y + 3z = 6$ e la retta di equazioni

$$r : \begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ \lambda x + y - z = 0 \end{cases} \quad ,$$

dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$.

a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la retta e il piano sono incidenti, e per quali sono paralleli.

b) Nei casi in cui π è parallelo a r, si determini la loro distanza.

37) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sia r la retta di equazioni $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$. Inoltre, per ogni $\mu \in \mathbb{R}$, sia data la retta $s : \begin{cases} 2x + (\mu - 1)y = 2 \\ 2x + y + (\mu + 3)z = 1 \end{cases}$.

a) Discutere la posizione reciproca di r e s, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

b) Negli eventuali casi in cui r e s siano complanari, trovare il piano che le contiene.

38) Calcolare la distanza tra le seguenti rette di $\mathbb{R}^3$

$$r : \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad .$$