Esercizi di Geometria – prima parte

1) Sia data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ -10 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcoli il determinante di A.

b) Si calcoli la matrice inversa del minore M_3^4.

2) Si considerino le matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 10 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si calcoli per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $C = AB$ è invertibile.

b) Fissato $\lambda = -1$, si trovi l'inversa di C.

c) Fissato $\lambda = -1$, si trovino le soluzioni del sistema $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Fissato $\lambda = 0$, si trovi una base per lo spazio delle colonne di C e una per lo spazio delle righe di C.

3) Sia dato il sistema lineare S nelle incognite reali x, y, z, t: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + 2z - t = 1 \\ 2x + y + t = -1 \end{cases}$.

a) Trovare l'insieme delle soluzioni.

b) Trovare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

c) Sia W il sottospazio affine di $\mathcal{E}^4$ che ha S come rappresentazione cartesiana. Si determini una rappresentazione parametrica per il sottospazio U di $\mathcal{E}^4$ parallelo a W e passante per il punto $P = (1, 1, 1, 0)$

4) Si consideri il seguente sistema lineare S nelle incognite reali x, y, z:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -y - \lambda z = 1 \\ -3x + y = 1 \\ y = \lambda \end{cases}.$$

a) Si discuta il sistema al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Scelto un valore per il quale il sistema risulti risolubile si calcoli l'insieme delle soluzioni.

5) Si consideri il sistema lineare x, y, z: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2x - 2y + \delta z = 10 \end{cases}$.

a) Si determini per quali valori di $\delta \in \mathbb{R}$ il sistema rappresenta una retta in $\mathcal{E}^3$ e per quali rappresenta un piano.

b) Sia r la retta rappresentata da S per $\delta = 0$ e sia s la retta di $\mathcal{E}^3$ passante per l'origine e di coefficienti direttori $(1, 1, 1)$. Si determini la posizione reciproca di r e s.

6) Sia dato il sistema lineare nelle incognite reali x, y, z: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + \gamma y - z = 1 \\ -y + 10z = 2 \end{cases}$.

a) Si calcoli per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il sistema è di Cramer.

b) Fissato $\gamma = -1$ si calcolino le soluzioni del sistema.

7) Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori $v_1 = (1, 3, 0)$, $v_2 = (1, 1, 10)$, $v_3 = (2, 4, 10)$ e $v_4 = (2, 2, 20)$.

a) Sia $W = L(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Si determini $\dim W$.

b) Si dica se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^3$ e se è linearmente indipendente.

c) Si trovi una base per W e si determini un sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

8) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1, 1, 1)$.

a) Si trovi una rappresentazione cartesiana per il complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$.

b) Si trovi una base ortonormale per il complemento ortogonale di W.

c) Si trovi la proiezione ortogonale del vettore $(0, 0, -1)$ nel complemento ortogonale di W.

9) In $\mathbb{R}^2[t]$ si considerino i polinomi $p_1 = 1 + 5t + t^2$, $p_2 = -1 + (5 - \lambda)t - t^2$ e $p_3 = 2 + 11t - (\lambda + 3)t^2$.

a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme ordinato $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ è una base di $\mathbb{R}^2[t]$.

b) Fissato $\lambda = 0$, si calcolino le coordinate di $q = t^2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

c) Fissato $\lambda = -1$, si calcoli la dimensione e una base per $L(p_1, p_2, p_3)$.

10) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:
$U = L((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$ e $W = L((0, 0, -1, 10), (1, 1, 1, 11))$.

a) Si calcoli una rappresentazione cartesiana per U e una parametrica per W.

b) Si trovi una base per $U + W$ e una per $U \cap W$.

c) Si determini un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker T = U$ e $\mathrm{Im} T = W$.

11) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+z+t=0 \\ 10y+10z-t=0 \\ -x+y+\lambda t=0 \end{cases}.$$

a) Si calcoli la dimensione di U al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Fissato $\lambda = 0$ si trovi una base per U.

12) In $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (s.v. delle matrici simmetriche reali 2×2), si considerino i sottospazi di rappresentazione cartesiana

$$U : \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} 6x-4y+10z=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

a) Si trovi una rappresentazione cartesiana per $U \cap W$ rispetto a $\mathcal{B}$ e si determini la dimensione di $U + W$.

b) Si trovi una base per U e la si completi ad una base di $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Si determini una rappresentazione cartesiana per U rispetto alla base di $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ trovata nel punto b).

13) Sia $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$ l'applicazione lineare definita da $F(p(t)) = (t^2+1)p'(t) + (t+10)p(t)$.

a) Si calcoli la matrice associata a F rispetto alle basi $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ e $\mathcal{B}' = (1, t, t^2, t^3)$ in, rispettivamente, dominio e codominio.

b) Si calcoli una base per $\operatorname{Ker} F$ e per $\operatorname{Im} F$.

c) Si calcoli $F^{-1}(t^2 + 11t + 11)$.

14) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T(x, y, z) = (3x - 3y + 6z, 5y - z, 8y - z)\,.$$

a) Si scriva la matrice canonicamente associata a T.

b) Si trovino gli autovalori di T.

c) Si dica se la matrice canonicamente associata a T è diagonalizzabile per similitudine.

15) Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo definito da

$$T(x, y) = (10x - y, 7x + 3y).$$

a) Si calcoli la matrice associata a T rispetto alla base ordinata $((1, 1), (1, 2))$.

b) Si calcoli una base per $\operatorname{Ker} T$ e una per $\operatorname{Im} T$.

c) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana $x+y=0$. Si determini una rappresentazione cartesiana per $T(W)$.

16) Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(1,1,1)=(2,-2,2), \quad f(1,-1,0)=(1,0,2), \quad f(0,0,-1)=(1,-1,1).$$

a) Si trovi la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}=((1,1,1),(1,-1,0),(0,0,-1))$.

b) Si trovi la matrice canonicamente associata a f.

c) Si descriva la relazione che c'è tra la matrice trovata nel punto a) e quella trovata in b).

17) Sia $F:\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da $F(X)=\mathrm{tr}(X)A+X$ dove $A=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

b) Si trovino gli autovalori di F.

c) Si verifichi che F è diagonalizzabile per similitudine e si calcoli una base di $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ spettrale rispetto a F.

18) Sia $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 1 & 0 \\ -8 & 18 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

a) Si calcoli una base per $\ker f$ e una per $\mathrm{Im} f$.

b) Si dica se il vettore $V=(0,0,1)$ appartiene all'immagine di f.

c) Si determini un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che la restrizione di f a W sia biunivoca.

19) Sia $F:\mathbb{R}^2(t) \to \mathbb{R}^2(t)$ l'endomorfismo definito da

$$F(1)=t \quad F(1+t)=2+2t \quad F(1+t^2)=t$$

a) Si calcoli la matrice $M_{\mathcal{B}}(F)$ associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}=(1,t,t^2)$.

b) Si calcolino gli autovalori di F.

c) Si dica se $M_{\mathcal{B}}(F)$ è diagonalizzabile per similitudine e in caso affermativo si determini una base spettrale per F.

20) Sia data la matrice $D=\begin{pmatrix} \gamma-1 & 1 & -1 \\ 2 & \gamma & 2 \\ \gamma & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Si calcoli per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice D è invertibile.

b) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che ha D come matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,2))$ di $\mathbb{R}^3$. Si calcoli, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, la dimensione di nucleo e immagine di F.

c) Dato $v = (1,1,4)$, si calcoli $F(v)$.

21) In $\mathbb{R}^3$, dati i vettori $v_1 = (3,1,-1)$, $v_2 = (0,1,2)$, $v_3 = (3,1,-6)$ sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $F(v_1) = -v_1 + v_2 - 10v_3$, $F(v_2) = 2v_2$ e $F(v_3) = -v_1 + v_2 - 10v_3$.

a) Si calcoli la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ in dominio e codominio.

b) Si calcoli una rappresentazione cartesiana per $\mathrm{Im}F$, specificando qual è la base scelta per il calcolo.

c) Si trovino gli autovalori di F e si dica se F ammette una base spettrale.

d) Scelto a piacere un autospazio di $\mathbb{R}^3$ relativo ad F se ne calcoli una base.