

Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA
XV CICLO

$(1, 1)$ -nodi e gruppi ciclicamente presentati

Tesi di Dottorato di:
Alessia Cattabriga

Relatore:
Prof. Michele Mulazzani

Coordinatore:
Prof. Bruno Franchi

Indice

Elenco delle figure	4
Introduzione	7
1 Nozioni preliminari	13
1.1 Decomposizione di Heegaard	13
1.2 Cenni di teoria dei nodi	17
1.2.1 Invarianti	18
1.2.2 Nodi a due ponti	23
1.2.3 Nodi torici	27
1.3 Rivestimenti ramificati	29
1.4 Mapping class group	32
2 Rappresentazione degli (1,1)-nodi	37
2.1 Il gruppo $MCG_2(\mathbb{T})$	37
2.2 (1,1)-nodi e $MCG_2(\mathbb{T})$	40
2.3 Il gruppo fondamentale	42
2.4 Rappresentazione standard	44
2.5 Rappresentazione dei nodi torici	47
2.6 Rappresentazione dei nodi a due ponti	50
3 Rivestimenti fortemente ciclici ramificati	53
3.1 Definizioni e proprietà	54
3.2 Connessioni con le presentazioni cicliche di gruppi	56
4 Varietà di Dunwoody ed (1,1)-nodi	63
4.1 Varietà di Dunwoody	63
4.2 Legami con gli (1,1)-nodi	70

Appendice	89
Bibliografia	91
Indice analitico	97

Elenco delle figure

1	a) Nodo a otto. b) Nodo trifoglio. c) Nodo a due ponti di genere uno con coefficienti di Conway $[2l, -2k]$	10
1.1	Corpo di manici di genere g	14
1.2	Diagrammi di Heegaard di: a) \mathbb{RP}^3 b) sfera di omologia di Poincaré.	16
1.3	Diagramma di Heegaard aperto di $L(p, q)$	17
1.4	Una $(3, 1)$ -decomposizione di un $(2, 2)$ -nodo.	20
1.5	Numerazione dei sottopassi.	24
1.6	Forma normale di Schubert del nodo a otto $\mathbf{b}(5, 3)$	24
1.7	Forma normale di Conway di $\mathbf{b}(l, t) = [a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m]$	26
1.8	Meridiano e parallelo standard del toro T	27
1.9	Nodo trifoglio $\mathbf{t}(3, -2)$	28
1.10	Relazioni classiche nei mapping class group.	35
1.11	Generatori di Wajnryb.	36
1.12	Generatori di Gervais.	36
2.1	Generatori di $MCG_2(T)$	38
2.2	Azione di τ_m e τ_l	39
2.3	I cappi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, e β_2	40
2.4	Una $(1, 1)$ -decomposizione.	41
2.5	Generatori di $\pi_1(L(p, q) - K_\psi, *)$	42
2.6	Una $(1, 1)$ -decomposizione di un nodo torico.	47
2.7	Effetto di τ_m e $\tau_l \tau_m$ sull'arco A	48
2.8	Banalizzazione di $\mathbf{t}(5, 7)$	49
2.9	Una relazione di tipo lanterna.	50
2.10	Rappresentazione standard del nodo a due ponti con parametri di Conway $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$	51
2.11	Rappresentazione standard del nodo a otto.	52

3.1	Sollevamento di una $(1, 1)$ -decomposizione.	57
4.1	Il grafo $\Gamma(a, b, c, n)$	64
4.2	Numerazione dei vertici di $\Gamma(a, b, c, n)$	65
4.3	Il diagramma di Heegaard associato alla sestupla banale $(0, 0, 0, n, 0, s)$	66
4.4	Il diagramma $H(a, b, c, 1, r, 0)$, con $a + b + c > 0$	68
4.5	Calcolo del gruppo fondamentale di $K(a, b, c, r)$	69
4.6	Diagramma di Heegaard associato al: a) generatore standard per $H_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2)$ b) nodo banale in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$	71
4.7	Movimento di Singer di tipo IB.	73
4.8	Archi di \mathcal{A}'_{k_1} e \mathcal{A}''_{k_1} per $h_1 = 2$, $h_2 = -2$ e $h_3 = 3$	74
4.9	Archi di \mathcal{B}_{k_2}	75
4.10	Il diagramma H_{k_2-1}	76
4.11	Il diagramma di Heegaard $H_z(a, b, c, 1, r, 0)$	78
4.12	Azione di $\psi_{1,0}$ su $K_0(0, 0, 0, 0)$	80
4.13	Azione di τ_m^{-1} su $K_0(a, b, c, r)$	80
4.14	Determinazione del parametro h	82
4.15	Azione di τ_l^{-1} su $K_z(a, b, c, r)$, per $r = h$	83
4.16	Azione di τ_l^{-1} su $K_z(a, b, c, r)$, per $r < h$ ed $r > h$	84
4.17	Studio dell'azione di τ_l^{-1} nel caso $r - h \geq h$	85
4.18	Equivalenza di $K(1, 1, 2, 1)$ e $K(1, 2, 1, 4)$	87
4.19	Presentazione di Dunwoody del nodo torico $\mathbf{t}(5, 8)$	88

Introduzione

Era il 1892 quando Poincaré nel suo articolo “Analysis Situs” [46] gettava le basi per uno studio sistematico delle varietà tridimensionali. In questo articolo egli introduce i concetti di varietà, omeomorfismo, omologia, dualità di Poincaré e gruppo fondamentale. Le 3-varietà compaiono come esempi, sia per illustrare questi concetti generali, sia per testare la forza degli invarianti topologici definiti (il gruppo fondamentale ed i numeri di Betti). Questi esempi sono ottenuti attraverso l’identificazione a coppie delle facce di un poliedro tridimensionale (nella fattispecie un cubo o un ottaedro). Quello introdotto da Poincaré è il primo dei tanti metodi utilizzati per descrivere e rappresentare le varietà tridimensionali. Pochi anni dopo, nel 1898, Heegaard introduce una tecnica di rappresentazione per le 3-varietà che fa uso di particolari diagrammi, chiamati appunto diagrammi di Heegaard (vedi [21]). Attraverso l’utilizzo di tali diagrammi lo studio delle varietà tridimensionali si riduce ad un problema 2-dimensionale. Ed è per analogia con quanto accade in dimensione due, dove ogni varietà chiusa ed orientabile è omeomorfa ad una superficie di Riemann, ossia un rivestimento di \mathbf{S}^2 ramificato su un insieme finito di punti, che nasce l’idea di studiare le 3-varietà attraverso i rivestimenti di \mathbf{S}^3 ramificati sui nodi o, più in generale, sui link. Alexander in [1] dimostra che la situazione in dimensione due si ripete anche nelle altre dimensioni e cioè che ogni n -varietà chiusa ed orientabile è un rivestimento ramificato della n -sfera. Tale risultato e la tecnica introdotta da Dehn in [12], attraverso la quale è possibile costruire 3-varietà tramite l’incollamento di un toro solido al complementare dell’intorno regolare di un nodo in \mathbf{S}^3 , danno alla teoria dei nodi un ruolo di primo piano all’interno dello studio delle 3-varietà. Questo determina lo sviluppo e la rilettura in chiave topologica dello studio dei nodi che fino a quel momento aveva rivestito un ruolo decisamente marginale, prettamente combinatorio e più legato alla rappresentazione di fenomeni di carattere fisico od astronomico che ad un interesse

matematico vero e proprio.

Ovviamente uno dei problemi fin da subito centrali e tuttora irrisolto era quello di trovare una classificazione delle varietà tridimensionali¹, ma le tecniche di rappresentazione delle 3-varietà introdotte da Poincaré, Heegaard ed Alexander, non diedero grandi risultati in questo senso. Con le seguenti parole, nel 1934, Seifert e Threlfall illustravano i risultati fino a quel momento ottenuti (vedi [50, p. 228]):

The construction of 3-dimensional manifolds has been reduced to a 2-dimensional problem by means of the Heegaard diagram. This problem is the enumeration of all the Heegaard diagrams. Even if the diagrams could all be enumerated, the homeomorphism problem in 3 dimensions would not be solved because a criterion is still lacking for deciding when two different Heegaard diagrams generate the same manifold. The enumeration has been carried out successfully in the simplest case, that of Heegaard diagrams of genus 1, but the problem of coincidence of manifolds, that is, the homeomorphism problem for lens spaces, has not been solved even here.

Another way to attempt the enumeration of all 3-dimensional manifolds would be to construct all polyhedra having pairwise association of faces. This also is a 2-dimensional problem and it has met with as little success at solution as the problem of enumerating the Heegaard diagrams.

It is known from the theory of functions of complex variables that one can obtain any closed orientable surface as a branched covering surface of the 2-sphere, where the branching occurs at finitely many points. Corresponding to this result, it is possible to describe each closed orientable 3-dimensional manifold as a branched covering of the 3-sphere. In this case the branching occurs along closed curves (knots) which lie in the 3-sphere. Here also the enumeration and distinguishing of individual covering spaces leads to unanswered questions. On occasion the same manifold can be derived as branched covering of the 3-sphere with

¹Tale problema è al contrario ampiamente risolto nelle altre dimensioni, in senso positivo per le dimensioni uno e due ed in senso negativo per le dimensioni maggiori di tre.

quite distinct knots as branch set; as an example, three different branch set are known for the spherical dodecahedron space.

Si tenta allora di approfondire la conoscenza delle varietà tridimensionali attraverso lo studio delle possibili strutture geometriche su tali varietà. In tal senso, si trova un risultato del tutto analogo a quello ottenuto in dimensione due e cioè che la geometria “predominante” in dimensione tre è quella iperbolica. Da qui l’interesse per lo studio delle varietà a struttura iperbolica, le uniche tra l’altro di cui ancora non si conosce una classificazione. In questa direzione il contributo maggiore si deve a Thurston e alla sua Congettura di Geometrizzazione (vedi [52]).

Anche in questo ambito lo studio dei nodi acquista un’importanza notevole grazie al lavoro dello stesso Thurston che dimostra che, ad eccezione dei nodi torici e dei nodi satellite, il complementare di ogni nodo primo in \mathbf{S}^3 ha una struttura iperbolica.

Come mostra questo breve excursus storico, le tecniche ed i metodi utilizzati per studiare e rappresentare le 3-varietà sono stati e sono numerosi, ma nel corso degli anni è diventato sempre più chiaro il fatto che i nodi e gli invarianti ed essi legati sono gli oggetti che probabilmente caratterizzano maggiormente la topologia geometrica in dimensione tre.

Lo studio di una particolare classe di nodi, detti $(1, 1)$ -nodi, è l’argomento di questa tesi. I motivi di interesse per tali nodi sono di diverso tipo, ad esempio sono coinvolti in diverse congetture riguardanti la chirurgia di Dehn (vedi [19, 55]), ma, in questo lavoro, si indaga sui legami esistenti tra tali nodi ed i gruppi ciclicamente presentati² ottenuti come gruppo fondamentale di particolari rivestimenti ciclici finiti ramificati degli $(1, 1)$ -nodi.

Già altri autori hanno recentemente messo in evidenza le connessioni tra i nodi e i gruppi ciclicamente presentati (vedi [3, 10, 15, 20, 22, 27, 28, 29, 34, 53]). Alcuni esempi interessanti in questo senso sono:

- (1) il gruppo di Fibonacci $F(2n) = G_{2n}(x_1x_2x_3^{-1}) = G_n(x_1^{-1}x_2^2x_3^{-1}x_2)$ che

²Una presentazione ciclica di un gruppo G è una presentazione

$$G = G_n(w) = \langle x_1, \dots, x_n \mid w, \theta_n(w), \dots, \theta_n^{n-1}(w) \rangle,$$

dove w è una parola nel gruppo libero F_n generato da x_1, \dots, x_n e $\theta_n : F_n \rightarrow F_n$ è l’automorfismo definito da $\theta_n(x_i) = x_{i+1}$ (indici mod n) per $i = 1, \dots, n$.

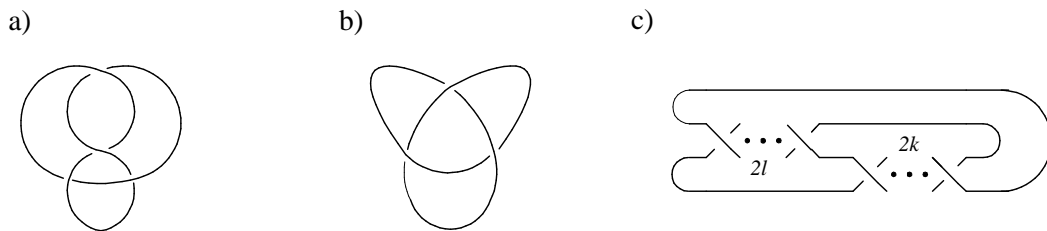


Figura 1: a) Nodo a otto. b) Nodo trifoglio. c) Nodo a due ponti di genere uno con coefficienti di Conway $[2l, -2k]$.

è il gruppo fondamentale del rivestimento ciclico ad n -fogli di \mathbf{S}^3 ramificato sul nodo a otto illustrato in Figura 1 a), per ogni $n > 1$ (vedi [22]);

- (2) il gruppo di Sieradski $S(n) = G_n(x_1 x_3 x_2^{-1})$ che è il gruppo fondamentale del rivestimento ciclico ad n -fogli di \mathbf{S}^3 ramificato sul nodo trifoglio illustrato in Figura 1 b), per ogni $n > 1$ (vedi [10]);
- (3) il gruppo di Fibonacci frazionario $\tilde{F}_{l,k}(n) = G_n((x_1^{-l} x_2^l)^k x_2 (x_3^{-l} x_2^l)^k)$ che è il gruppo fondamentale del rivestimento ciclico ad n -fogli di \mathbf{S}^3 ramificato sul nodo a due ponti di genere uno con coefficienti di Conway $[2l, -2k]$ illustrato in Figura 1 c), per ogni $n > 1$ (vedi [53]).

In [15] Dunwoody introduce una classe di diagrammi di Heegaard dipendenti da sei parametri interi, con una simmetria ciclica che induce una presentazione ciclica per i corrispondenti gruppi fondamentali. Di nuovo tali presentazioni cicliche risultano legate ai nodi. Infatti in [20, Th. 6] si dimostra che le 3-varietà rappresentate da tali diagrammi, chiamate varietà di Dunwoody, sono in realtà rivestimenti fortemente ciclici³ ramificati di $(1, 1)$ -nodi. Questo risultato è il punto di partenza per il lavoro di ricerca contenuto in questa tesi, anche se, come ricordato in precedenza, l'importanza dello studio delle proprietà degli $(1, 1)$ -nodi va al di là delle loro connessioni con i gruppi ciclicamente presentati.

La parte originale della tesi è contenuta nei Capitoli 2, 3 e 4, mentre il Capitolo 1 è interamente dedicato alla descrizione dei concetti e delle tecniche

³Un rivestimento ciclico finito è detto fortemente ciclico se la controimmagine di ogni punto di ramificazione contiene un solo punto.

utilizzate nel lavoro: le decomposizioni ed i diagrammi di Heegaard, alcuni concetti ed esempi essenziali della teoria dei nodi con particolare attenzione ai nodi torici ed ai nodi a due ponti in \mathbf{S}^3 , i rivestimenti ramificati ed il mapping class group.

Nel secondo capitolo viene sviluppata una rappresentazione algebrica degli $(1, 1)$ -nodi attraverso gli elementi di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$, il mapping class group puro 2-puntato del toro⁴ (i.e. $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$). In termini di tale rappresentazione vengono calcolati alcuni invarianti degli $(1, 1)$ -nodi come ad esempio il gruppo fondamentale. Viene inoltre discussa la non unicità di tale rappresentazione. In tal senso, si dimostra che in effetti ogni $(1, 1)$ -nodo può essere rappresentato (in maniera comunque non unica) da un elemento di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ che è la composizione di un elemento appartenente ad un particolare sottogruppo libero di rango due ed un elemento che dipende solo dallo spazio ambiente in cui è contenuto il nodo. Questa rappresentazione viene chiamata “standard”. Come rilevante applicazione viene trovata esplicitamente la rappresentazione standard delle due più importanti classi di $(1, 1)$ -nodi in \mathbf{S}^3 : i nodi torici ed i nodi a due ponti.

Nel terzo capitolo si definisce la nozione di rivestimento fortemente ciclico ramificato di un $(1, 1)$ -nodo e se ne studiano le proprietà. In particolare, se ne danno condizioni di esistenza ed unicità e, dato che tali rivestimenti ammettono una presentazione ciclica per il gruppo fondamentale (vedi [42]), si ottiene un algoritmo che, partendo da un elemento di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ che rappresenta un $(1, 1)$ -nodo K , permette di trovare la parola che determina la presentazione ciclica del gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato di K . Inoltre, si dimostra che il polinomio di Alexander di un $(1, 1)$ -nodo $K \subset \mathbf{S}^3$ (un importante invariante definito per i nodi in \mathbf{S}^3) coincide con un determinato polinomio associato alla presentazione ciclica del rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli ramificato di K , per n sufficientemente grande.

Nel quarto capitolo si prendono in considerazione le varietà di Dunwoody. Si dimostra che ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato di un $(1, 1)$ -nodo è una varietà di Dunwoody. Questo teorema insieme al risultato di [20], da cui ha preso avvio tutto il lavoro, dimostra che la classe dei rivestimenti fortemente ciclici ramificati degli $(1, 1)$ -nodi coincide con quella delle varietà

⁴Il mapping class group puro 2-puntato del toro è il gruppo costituito dalle classi di isotopia degli automorfismi $\psi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ che conservano l'orientazione e tali che $\psi(P_1) = P_1$ e $\psi(P_2) = P_2$, con P_1, P_2 due punti fissati in \mathbb{T} .

di Dunwoody. Inoltre viene descritto un algoritmo che, partendo dall'elemento di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ che rappresenta in maniera standard un nodo torico K , permette di trovare i parametri che determinano la varietà di Dunwoody che ne è rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli, per ogni $n > 1$.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo primo capitolo sono raccolti i concetti e le tecniche che saranno utilizzati in seguito. Innanzitutto fissiamo alcune notazioni e convenzioni che saranno assunte per tutto il resto della tesi.

Con il termine 3-varietà indicheremo uno spazio topologico di Hausdorff localmente omeomorfo a \mathbb{R}^3 e assumeremo sempre, tranne ove esplicitamente precisato, che tale varietà sia chiusa (cioè compatta e senza bordo), connessa e orientabile. Inoltre, dato che in dimensione minore o uguale a tre la categoria delle varietà topologiche e quella delle varietà PL (i. e. lineari a tratti) sono equivalenti, assumeremo sempre che sia fissata una triangolazione sulla 3-varietà. Dato un intero $n \geq 1$, indicheremo con \mathbf{D}^n una palla n -dimensionale in \mathbb{R}^n , cioè $\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, mentre \mathbf{S}^{n-1} denoterà la $(n - 1)$ -sfera, cioè $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Chiameremo disco e sfera, rispettivamente, una 2-palla \mathbf{D}^2 e una 2-sfera \mathbf{S}^2 .

Dato uno sottospazio topologico X di uno spazio topologico Y , i simboli $\text{cl } X$, $\text{int } X$ e ∂X denoteranno rispettivamente la chiusura, la parte interna e il bordo di X in Y . Si ha $\partial \mathbf{D}^n = \mathbf{S}^{n-1}$. Infine dato un insieme S , il simbolo $|S|$ denoterà la cardinalità di S .

1.1 Decomposizione di Heegaard

In questo paragrafo ci occuperemo di uno dei tanti metodi esistenti per rappresentare le 3-varietà: la decomposizione di Heegaard. Per referenze sulle differenti rappresentazioni delle 3-varietà (incollamenti di tetraedri, chirurgia

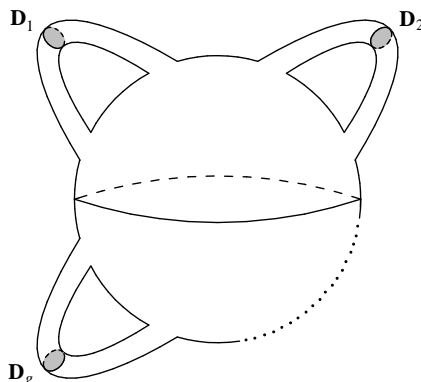


Figura 1.1: Corpo di manici di genere g .

sui nodi e sui link, spine, gems, ecc...) si veda [23, 26, 33, 35, 47].

Un *corpo di manici di genere g* è una 3-varietà con bordo H_g , connessa, compatta e orientabile tale che esistono g dischi $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_g$ tra loro disgiunti e propriamente immersi¹ in H_g tali che, se $N(\mathbf{D}_1), \dots, N(\mathbf{D}_g)$ sono intorni regolari tra loro disgiunti di, rispettivamente, $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_g$ in H_g , si ha che la chiusura di $H_g - (\cup_{i=1}^g N(\mathbf{D}_i))$ è omeomorfa a \mathbf{D}^3 (vedi Figura 1.1).

È facile verificare che tutti i corpi di manici di genere g sono fra loro omeomorfi ed hanno il bordo omeomorfo ad una superficie orientabile di genere g . I dischi $\mathbf{D}_i \subset H_g$ sono detti *dischi meridiani* mentre le curve $\partial\mathbf{D}_i$ sono dette *curve meridiane*, per $i = 1, \dots, g$.

Siano ora H_g e H'_g due corpi di manici orientati di genere g e sia $\varphi : \partial H'_g \rightarrow \partial H_g$ un omeomorfismo. Sia, inoltre, $M = H_g \cup_{\varphi} H'_g$ lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di H_g e H'_g mediante l'identificazione di ogni punto $P \in \partial H'_g$ con il punto $\varphi(P) \in \partial H_g$. Si può verificare che M è in effetti una 3-varietà orientabile.

Viceversa, data una 3-varietà M , una *decomposizione di Heegaard di genere g* di M è una presentazione di M come $H_g \cup_{\varphi} H'_g$ dove $H_g \subset M$ e $H'_g = \text{cl}(M - H_g)$ sono corpi di manici di genere g , e $\varphi : \partial H'_g \rightarrow \partial H_g$ è l'identità. La superficie $\partial H_g = \partial H'_g$ è detta superficie di Heegaard.

¹Siano N e M due varietà con bordo, allora N è detta *propriamente immersa* in M se N è una sottovarietà di M e si ha $N \cap \partial M = \partial N$.

Teorema 1.1.1. [47, Th. 8.3] *Ogni 3-varietà ammette una decomposizione di Heegaard.*

Sia M una 3-varietà, il *genere di Heegaard* di M è il minimo intero non negativo g per cui M ammette una decomposizione di Heegaard di genere g .

Osservazione 1.1.1. [35] L'unica 3-varietà di genere zero è \mathbf{S}^3 , mentre le 3-varietà di genere uno sono $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ e gli spazi lenticolari $L(p, q)$ di cui si ha la seguente classificazione: gli spazi lenticolari $L(p, q)$ ed $L(p', q')$, con p, p', q, q' interi tali che $p, p' \neq 0, 1$ e $\gcd(p, q) = \gcd(p', q') = 1$, sono omeomorfi se e solo se $|p| = |p'|$ e $q \equiv \pm q'^{\pm 1} \pmod{|p|}$.

Per rappresentare graficamente una decomposizione di Heegaard di una 3-varietà si ricorre ad un diagramma detto diagramma di Heegaard, definito come segue. Sia $M = H_g \cup_{\varphi} H'_g$ una decomposizione di Heegaard di genere g di una 3-varietà M e siano u_1, \dots, u_g e u'_1, \dots, u'_g sistemi di curve meridiane, rispettivamente, per H_g e H'_g . Sia T_g una fissata superficie di genere g orientata e immersa in modo standard in \mathbb{R}^3 (come illustrato in Figura 1.1) e sia $\iota : \partial H_g \rightarrow T_g$ un omeomorfismo. Un *diagramma di Heegaard* di genere g della 3-varietà M è costituito dai sistemi di curve $\{\iota\varphi(u'_i)\}$ e $\{\iota(u_i)\}$ su T_g , con $i = 1, \dots, g$. Per comodità, solitamente, uno dei due sistemi di curve di un diagramma di Heegaard di genere g viene scelto in maniera standard, ossia viene identificato con le curve meridiane $\partial \mathbf{D}_1, \dots, \partial \mathbf{D}_g$ illustrate in Figura 1.1 del corpo di manici di cui la superficie T_g è bordo. In Figura 1.2 sono riportati i diagrammi di Heegaard di $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ e della sfera di omologia di Poincaré.

Diamo ora una caratterizzazione dei diagrammi di Heegaard.

Proposizione 1.1.1. [47, §10.3] *Due sistemi di curve chiuse c_1, \dots, c_g ed e_1, \dots, e_g su T_g costituiscono un diagramma di Heegaard di genere g (i.e. esiste una 3-varietà M che ha c_1, \dots, c_g ed e_1, \dots, e_g come diagramma di Heegaard di genere g) se sono verificate entrambe le seguenti condizioni:*

- (1) *le curve c_1, \dots, c_g sono disgiunte a due a due e $T_g - (\cup_{i=1}^g c_i)$ è connesso;*
- (2) *le curve e_1, \dots, e_g sono disgiunte a due a due e $T_g - (\cup_{i=1}^g e_i)$ è connesso.*

Dato il diagramma di Heegaard su T_g costituito dai sistemi di curve $\{c_i\}$ ed $\{e_i\}$, con $i = 1, \dots, g$, sia Λ la superficie ottenuta tagliando T_g lungo le curve di $\{c_i\}$. Denotiamo con C'_i e C''_i la coppia di componenti di bordo su

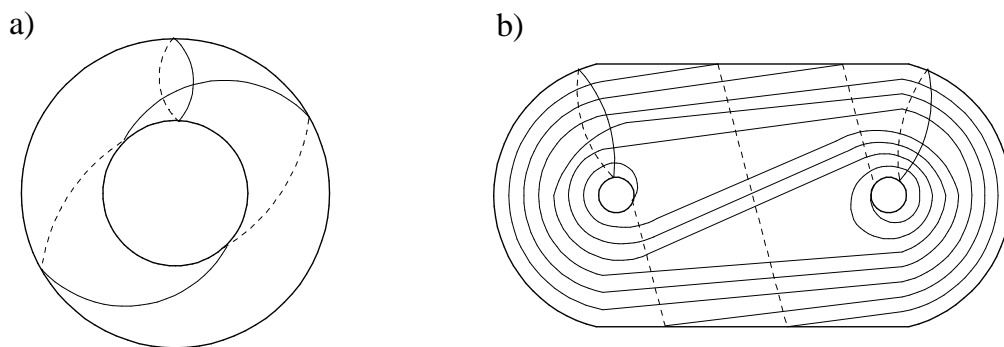


Figura 1.2: Diagrammi di Heegaard di: a) $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ b) sfera di omologia di Poincaré.

Λ ottenute dal taglio lungo c_i , per $i = 1, \dots, g$. Chiaramente Λ è una sfera privata della parte interna di $2g$ dischi a due a due disgiunti e le curve C'_i e C''_i sono le circonferenze che bordano tali dischi. Si può definire in modo naturale una mappa suriettiva tra Λ e T_g , la cui restrizione a $\Lambda - \cup_{i=1}^g (C'_i \cup C''_i)$ è un omeomorfismo su $T_g - \cup_{i=1}^g c_i$ e tale che la controimmagine di una curva e_i , che sarà denotata con E_i , è una curva chiusa se e_i non interseca nessuna delle curve c_j o un sistema di archi aventi estremi sulle circonferenze C'_j, C''_j altrimenti, con $i, j = 1, \dots, g$. Incollando lungo ogni C'_i ed ogni C''_i un disco, per $i = 1, \dots, g$, otteniamo un diagramma su \mathbf{S}^2 costituito da C'_i, C''_i ed E_i , detto diagramma di Heegaard aperto. Chiameremo *circonferenze canoniche* le circonferenze C'_i e C''_i e *dischi canonici* i $2g$ dischi bordati in \mathbf{S}^2 dalle circonferenze canoniche che non contengono al loro interno nessun arco del diagramma. Ovviamente, dato un diagramma di Heegaard aperto di genere g ed una “regola di incollamento” fra coppie di circonferenze canoniche, si passa al corrispondente diagramma di Heegaard “chiuso”, rimuovendo la parte interna dei dischi canonici ed incollando le circonferenze canoniche a due a due secondo la regola data. In Figura 1.3 è riportato il diagramma di Heegaard aperto dello spazio lenticolare $L(p, q)$ (dove supponiamo $p > 0$ e consideriamo la numerazione dei vertici \pmod{p}). La regola di incollamento consiste nell’identificare i vertici su C' e C'' che hanno la stessa numerazione.

Non si è raggiunta una forma normale per il diagramma di Heegaard di una fissata 3-varietà, tuttavia si conosce un’insieme di trasformazioni elementari, detti movimenti di Singer, tali che due qualsiasi diagrammi di Heegaard della stessa varietà sono collegati da una successione finita di esse (vedi [51]).

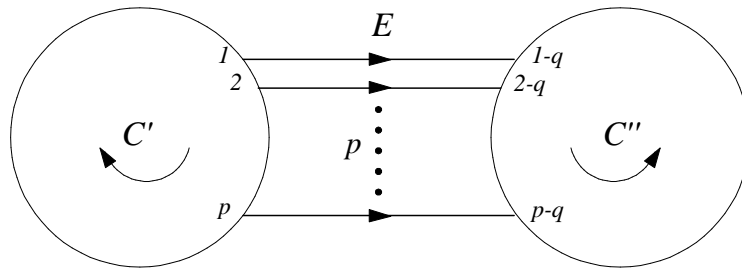


Figura 1.3: Diagramma di Heegaard aperto di $L(p, q)$.

1.2 Cenni di teoria dei nodi

Benché si possa dare una definizione di nodo in una varietà topologica qualsiasi, la teoria dei nodi si è sviluppata principalmente e storicamente in \mathbb{R}^3 o, equivalentemente, in \mathbf{S}^3 (visto come la compattificazione uno-punto di \mathbb{R}^3). Per questo, anche se definiremo il concetto di nodo ed equivalenza di nodi in una 3-varietà qualsiasi, molti degli invarianti classici e degli esempi che descriveremo in questo paragrafo riguardano i nodi in \mathbb{R}^3 .

Sia M una 3-varietà. Un *nodo* in M è una 1-sottovarietà connessa di M . Un nodo è *banale* se borda un disco in M .

Due nodi K e K' si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tale che $h(K) = K'$. Se inoltre h conserva l'orientazione di M , i due nodi sono detti *fortemente equivalenti*. Se i nodi sono orientati, si definisce un analogo concetto di equivalenza, richiedendo che l'orientazione indotta su K' , tramite h , dall'orientazione di K coincida con quella fissata su K' . Se K è un nodo orientato, allora con il simbolo $-K$ viene indicato lo stesso nodo, ma con l'orientazione opposta. Quando K è fortemente equivalente a $-K$, il nodo K viene detto *invertibile*.

Sia $g : M \rightarrow M$ un omeomorfismo che rovescia l'orientazione, e sia K un nodo. L'*immagine speculare* ("mirror image") di K è il nodo $g(K) = K^*$ (si noti che la classe di equivalenza forte di K^* non dipende da g). Un nodo K è detto *anferico* se è fortemente equivalente a K^* .

Osservazione 1.2.1. Due nodi K e K' sono equivalenti se e solo se K' è fortemente equivalente a K o a K^* .

Sia $N(K)$ un intorno regolare del nodo K in M , allora esiste un omeomorfismo $f : (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2, \mathbf{S}^1 \times 0) \rightarrow (N(K), K)$. Fissato un punto $P \in \mathbf{S}^1$, gli insiemi $f(P \times \mathbf{D}^2)$ e $f(P \times \partial\mathbf{D}^2)$ sono chiamati rispettivamente, *disco meridiano* e *meridiano* di K .

Nella classe dei nodi orientati in \mathbf{S}^3 (o in \mathbb{R}^3) è possibile definire un'operazione interna, detta *somma connessa*, nel modo seguente. Dati due nodi orientati $K_1, K_2 \subset \mathbf{S}^3$, siano P_1 e P_2 due punti su, rispettivamente, K_1 e K_2 e siano $(\mathbf{D}_1^3, \mathbf{D}_1^1)$ e $(\mathbf{D}_2^3, \mathbf{D}_2^1)$ intorni regolari di P_1 e P_2 in (\mathbf{S}^3, K_1) e (\mathbf{S}^3, K_2) , disgiunti tra loro. La *somma connessa* dei nodi K_1 e K_2 è il nodo orientato $K_1 \# K_2$ ottenuto dall'unione disgiunta delle coppie $(\mathbf{S}^3 - \text{int } \mathbf{D}_i^3, K_i - \text{int } \mathbf{D}_i^1)$, $i = 1, 2$, incollando i bordi attraverso un omeomorfismo $\varphi : (\partial\mathbf{D}_1^3, \partial\mathbf{D}_1^1) \rightarrow (\partial\mathbf{D}_2^3, \partial\mathbf{D}_2^1)$ che rovescia l'orientazione. Ovviamente l'elemento neutro della somma connessa tra nodi è il nodo banale. Tale operazione dà alla classe dei nodi orientati in \mathbf{S}^3 (o in \mathbb{R}^3) la struttura di monoide commutativo. Un nodo in \mathbf{S}^3 (o in \mathbb{R}^3) è detto *primo* se è non banale e non può essere ottenuto come somma connessa di due nodi entrambi non banali. I nodi primi rivestono un ruolo fondamentale per la classificazione dei nodi in \mathbf{S}^3 . Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 1.2.1. [7, Th. 7.12] *Ogni nodo non banale $K \subset \mathbf{S}^3$ si decompone nella somma connessa di un numero finito di nodi primi e tali fattori sono unicamente determinati. Più precisamente:*

- (1) $K = K_1 \# \cdots \# K_n$, dove K_i è un nodo primo, per $i = 1, \dots, n$;
- (2) se $K = K_1 \# \cdots \# K_n = K'_1 \# \cdots \# K'_m$ sono due decomposizioni in fattori primi di K allora $n = m$ ed esiste $\sigma \in \Sigma_n$ tale che $K_i = K'_{\sigma(i)}$, per $i = 1, \dots, n$.

1.2.1 Invarianti

In questa sezione illustreremo alcuni invarianti dei nodi che verranno utilizzati nei prossimi capitoli.

NUMERO DI PONTI. Sia K un nodo in \mathbb{R}^3 che incontra trasversalmente un piano $E \subset \mathbb{R}^3$ in $2b$ punti tali che i b archi di K contenuti in ogni semispazio possiedono proiezioni ortogonali su E che sono semplici e disgiunte; allora diremo che (K, E) è una *presentazione a b ponti* di K . Il *numero di*

ponti di K è il minimo intero positivo b per cui K ammette una presentazione a b ponti. L'unico nodo che ha numero di ponti uguale a uno è il nodo banale. Esiste, come vedremo più avanti, una classificazione dovuta a H. Schubert [49] dei nodi a due ponti, mentre non è ancora stata trovata una classificazione dei nodi con numero di ponti maggiore o uguale a tre.

In $\mathbf{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, la nozione di numero di ponti può essere riletta nella maniera seguente.

Introduciamo innanzitutto il seguente concetto: un insieme di archi $\{t_1, \dots, t_b\}$ tra loro disgiunti e propriamente immersi in una 3-varietà M con bordo è detto *banale* se esistono b dischi $B_1, \dots, B_b \subset M$ disgiunti tra loro tali che $t_i \cap \partial B_i = t_i$, $t_i \cap B_j = \emptyset$ e $\partial B_i - t_i \subset \partial M$ per ogni $i, j = 1, \dots, b$ con $i \neq j$.

Dato un nodo K in \mathbf{S}^3 , una presentazione a b ponti di K sarà la coppia (S, K) dove $S \subset \mathbf{S}^3$ è una superficie omeomorfa a \mathbf{S}^2 che decompone \mathbf{S}^3 in due spazi D_1 e D_2 omeomorfi a \mathbf{D}^3 tali che $D_1 \cap K$ e $D_2 \cap K$ sono entrambi l'unione di b archi banali disgiunti e propriamente immersi. Si noti che la superficie S può essere vista come la compattificazione uno-punto del piano E precedentemente considerato in \mathbb{R}^3 .

Analogamente a quando fatto sopra, il numero di ponti di un nodo K in \mathbf{S}^3 sarà definito come il minimo intero positivo b per cui K ammette una presentazione a b ponti.

NUMERO DI PONTI GENERALIZZATO. Sia $H_g \cup_{\varphi} H'_g$ una decomposizione di Heegaard di genere g di M e poniamo $F = \partial H_g = \partial H'_g$. Un nodo $K \subset M$ è detto *in posizione a b ponti rispetto a F* se:

- (i) K interseca trasversalmente F ;
- (ii) $K \cap H_g$ e $K \cap H'_g$ sono entrambi l'unione di b archi banali tra loro disgiunti e propriamente immersi.

La decomposizione è detta una (g, b) -decomposizione di K . Dato che una $(0, b)$ -decomposizione di K non è altro che una sua presentazione a b ponti, la nozione di (g, b) -decomposizione per i nodi nelle 3-varietà generalizza il concetto di presentazione a b -ponti per i nodi in \mathbb{R}^3 (o in \mathbf{S}^3).

Il numero di ponti di genere g di K (definito da H. Doll in [14]) è il minimo intero positivo b per cui K ammette una (g, b) -decomposizione. Ovviamente

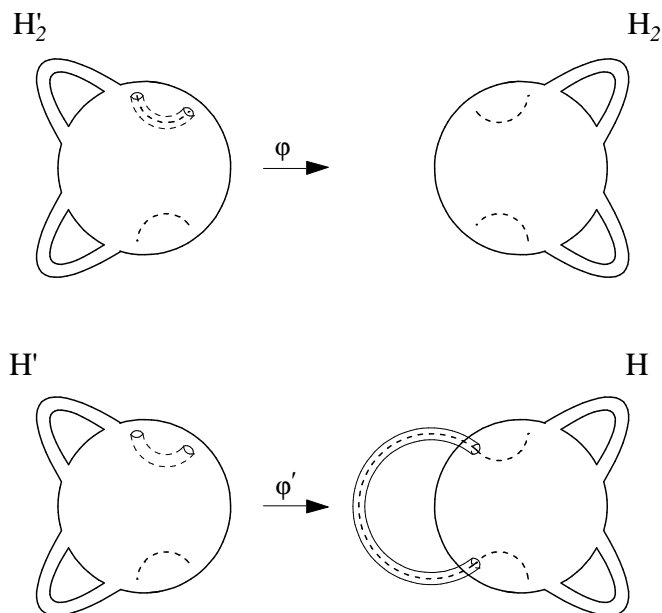


Figura 1.4: Una $(3, 1)$ -decomposizione di un $(2, 2)$ -nodo.

il numero di ponti di genere zero è il classico numero di ponti in \mathbb{R}^3 (o in \mathbf{S}^3). Un nodo è detto un (g, b) -nodo se ammette una (g, b) -decomposizione.

Osservazione 1.2.2. È facile verificare che la classe dei (g, b) -nodi è contenuta nella classe dei $(g+1, b-1)$ -nodi. Infatti sia K un (g, b) -nodo e sia $H_g \cup_{\varphi} H'_g$ una (g, b) -decomposizione. Sia $H'_g \cap K = \{t'_1, \dots, t'_b\}$ e consideriamo un intorno $N(t'_1)$ dell'arco t'_1 in H'_g tale che $f : (N(t'_1), t'_1) \cong ([-1, 1] \times \mathbf{D}^2, [-1, 1] \times 0)$ e $N(t'_1) \cap t'_i = \emptyset$, per $i = 2, \dots, b$. Poniamo $C'_1 = f^{-1}(-1 \times \mathbf{D}^2)$, $C'_2 = f^{-1}(1 \times \mathbf{D}^2)$, $C' = f^{-1}([-1, 1] \times \partial \mathbf{D}^2)$ e chiamiamo P'_i l'estremo di t'_1 appartenente a C'_i , per $i = 1, 2$. Sia $\bar{\varphi}$ un omeomorfismo che identifica C'_i con un'opportuno intorno di $\varphi(P'_i)$ in ∂H_g in modo tale che $\bar{\varphi}(P'_i) = \varphi(P'_i)$, per $i = 1, 2$. Allora $H' = \text{cl}(H'_g - N(t'_1))$ e $H = H_g \cup_{\bar{\varphi}} N(t'_1)$ sono corpi di manici di genere $g+1$ e $H \cup_{\varphi'} H'$, dove $\varphi' : \partial H' \rightarrow \partial H$ estende in modo naturale φ è una $(g+1, b-1)$ -decomposizione per K (vedi Figura 1.4).

NUMERO DI TUNNEL. Sia K un nodo in \mathbf{S}^3 . Un arco $t \subset \mathbf{S}^3$ con estremi P_0 e P_1 è detto *tunnel* per K se vale $K \cap t = \{P_0, P_1\}$. Il *numero di tunnel* $t(K)$ di K è il minimo numero di tunnel $\{t_i\}_{i \in I}$ tra loro disgiunti tali che il complementare di un intorno aperto e regolare di $K \cup_{i \in I} t_i$ è un corpo di

manici. La famiglia di archi soddisfacenti tale condizione è detta *unknotting system* di K . In particolare, se il sistema contiene un unico arco esso sarà detto *unknotting tunnel* per K . Ovviamente il nodo banale è l'unico nodo con numero di tunnel zero.

Osservazione 1.2.3. Se un nodo K ammette una (g, b) -decomposizione, allora $t(K) \leq g + b - 1$ (vedi [39]). In particolare, se K ammette una $(1, 1)$ -decomposizione allora ha numero di tunnel minore o uguale ad uno. Tuttavia il viceversa non vale (vedi [38, 39, 56]).

GRUPPO FONDAMENTALE. Sia $K \subset M$ un nodo. Il *gruppo fondamentale* di K (o più semplicemente il *gruppo* di K) che verrà denotato con $\pi_1(M - K)$, è il gruppo fondamentale $\pi_1(E(K), *)$ dove $*$ $\in E(K)$ è un punto base ed $E(K) = \text{cl}(M - N(K))$, con $N(K)$ intorno regolare di K in M . Mentre due nodi equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi, in generale non vale il viceversa. Tuttavia si ha il seguente risultato.

Proposizione 1.2.1. [26, Th. 6.1.12] *Siano K_1 e K_2 due nodi primi in \mathbf{S}^3 . Allora K_1 è equivalente a K_2 se e solo se $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K_1) \cong \pi_1(\mathbf{S}^3 - K_2)$.*

Sempre per i nodi in \mathbf{S}^3 vale il seguente enunciato riguardante l'abelianizzato del gruppo fondamentale.

Proposizione 1.2.2. [7, Th. 3.1] *Sia $K \subset \mathbf{S}^3$ un nodo. Si ha:*

$$H_1(\mathbf{S}^3 - K) = H_1(E(K), \mathbb{Z}) = \pi_1(\mathbf{S}^3 - K) / [\pi_1(\mathbf{S}^3 - K), \pi_1(\mathbf{S}^3 - K)] = \langle u \rangle \cong \mathbb{Z},$$

dove u rappresenta la classe di omologia di un meridiano del nodo.

Esiste un metodo classico, introdotto da Wirtinger, per ottenere una presentazione per il gruppo fondamentale di un nodo in \mathbf{S}^3 , detta appunto presentazione di Wirtinger (vedi [7, Th. 3.4]).

POLINOMIO DI ALEXANDER. Sia K un nodo in \mathbf{S}^3 e sia $E(K) = \text{cl}(\mathbf{S}^3 - N(K))$, con $N(K)$ intorno regolare di K in \mathbf{S}^3 . Il rivestimento $p : C_\infty \rightarrow E(K)$ corrispondente al sottogruppo dei commutatori $[\pi_1(\mathbf{S}^3 - K), \pi_1(\mathbf{S}^3 - K)]$ di $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è detto *rivestimento universale abeliano* di $E(K)$. L'azione di $H_1(\mathbf{S}^3 - K)$ su C_∞ come gruppo delle trasformazioni del rivestimento, induce su $H_1(C_\infty)$ una struttura di modulo sull'anello $\mathbb{Z}H_1(\mathbf{S}^3 - K)$ associato al gruppo $H_1(\mathbf{S}^3 - K)$. Si noti che, per

la Proposizione 1.2.2, il gruppo $H_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è il gruppo ciclico infinito generato dalla classe u di un meridiano di K , quindi $\mathbb{Z}H_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è l'anello $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ dei polinomi di Laurent nella variabile u . Il *modulo di Alexander* di K , denotato con $A(K)$, è lo $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ -modulo $H_1(C_\infty)$, che risulta essere finitamente presentato.

Richiamiamo ora alcune nozioni sui moduli finitamente presentati.

Sia M un R -modulo finitamente presentato, dove R è un anello commutativo con unità, e sia $G \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$ una sua presentazione finita, dove G ed F sono R -moduli liberi. Se α è rappresentata dalla matrice A rispetto alle basi g_1, \dots, g_m ed f_1, \dots, f_n di, rispettivamente, G ed F (dove la notazione è tale che $\alpha(g_i) = \sum_j A_{ij}f_j$) allora la matrice A , con m righe ed n colonne, è una *matrice di presentazione* per M . Le matrici di presentazione di uno stesso modulo non sono ovviamente uniche, ma date due diverse matrici di presentazione si può passare dall'una all'altra tramite una successione di operazioni elementari (vedi [26, Lemma 7.2.1]). Se A è una matrice di presentazione $m \times n$ per l' R -modulo M , per ogni intero r , definiamo l' *r -esimo ideale elementare* \mathcal{E}_r di M come:

$$\mathcal{E}_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq 0 \text{ oppure } n - r + 1 > m \\ R & \text{se } n - r + 1 \leq 0 \\ \text{l'ideale generato dai minori di ordine } n - r + 1 & \text{di } A \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Gli ideali elementari di un modulo sono indipendenti dalla matrice di presentazione scelta per calcolarli, inoltre si ha $\mathcal{E}_{r-1} \subset \mathcal{E}_r$, per ogni $r \in \mathbb{Z}$.

Dato un nodo K , per ogni intero r , definiamo l' *r -esimo ideale di Alexander* di K come l' r -esimo ideale elementare del modulo di Alexander $A(K)$. Il massimo comun divisore $\Delta_K^r(u)$ degli elementi dell' r -esimo ideale di Alexander di K è chiamato *r -esimo polinomio di Alexander* di K . Il primo polinomio di Alexander $\Delta_K^1(u)$ di K viene semplicemente chiamato *polinomio di Alexander* di K e denotato con $\Delta_K(u)$.

Si osservi che, essendo $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ un dominio a fattorizzazione unica, $\Delta_K^r(u)$ esiste ed è determinato a meno di unità di $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$, cioè di fattori del tipo $\pm u^h$, con $h \in \mathbb{Z}$. Sia

$$\Delta_K^r(u) = a_i u^i + a_{i+1} u^{i+1} + \dots + a_{j-1} u^{j-1} + a_j u^j,$$

con i, j interi e $a_i, a_j \neq 0$, l' r -esimo polinomio di Alexander di K . Definiamo il grado di $\Delta_K^r(u)$ come l'intero non negativo $j - i$.

Il seguente teorema dà una caratterizzazione dei polinomi di Alexander di un nodo.

Teorema 1.2.2. [7, Prop. 8.12] [41, §6.3] *I polinomi di Alexander $\Delta_K^r(u)$ del nodo K sono polinomi di grado pari, a coefficienti interi e soggetti alle seguenti condizioni:*

- (1) $\Delta_K^r(u)$ divide $\Delta_K^{r-1}(u)$;
- (2) $\Delta_K^r(u) = \Delta_K^r(u^{-1})$;
- (3) $\Delta_K^r(1) = \pm 1$.

In particolare per il polinomio di Alexander vale:

- (4) $\Delta_K = \Delta_{-K}$;
- (5) $\Delta_K = \Delta_{K^*}$.

Inoltre per ogni polinomio $p(u) \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ che soddisfa (2) e (3) esiste un nodo $K \subset \mathbf{S}^3$ che ha $p(u)$ come polinomio di Alexander.

Descriviamo ora brevemente due classi di nodi in \mathbf{S}^3 che verranno utilizzate nei prossimi capitoli: i nodi a due ponti ed i nodi torici.

1.2.2 Nodi a due ponti

Esistono due forme normali per i nodi a due ponti in \mathbb{R}^3 : la forma normale di Schubert e la forma normale di Conway.

Forma normale di Schubert. Per un nodo a due ponti $K \subset \mathbb{R}^3$, esiste la seguente presentazione, detta di Schubert, dipendente da due interi dispari l e t primi tra loro e tali che $l \geq 1, t \in \mathbb{Z}_{2l}$.

Fissiamo su \mathbb{R}^3 un riferimento cartesiano tale che (K, E) sia una presentazione a due ponti per K , dove E è il piano $z = 0$; possiamo assumere che i due archi del semispazio superiore (i due ponti) si proiettino su E secondo due segmenti rettilinei $w_1 = A_1B_1$ e $w_2 = A_2B_2$, mentre i due archi del

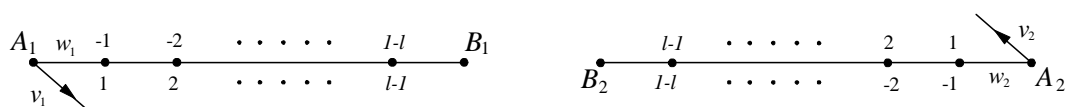


Figura 1.5: Numerazione dei sottopassi.

semispazio inferiore si proiettano in due curve semplici disgiunte v_1 e v_2 che connettono A_1, B_1, A_2, B_2 . La proiezione ammette esattamente $l - 1$ punti doppi (sottopassi) per ogni ponte, che numeriamo ai due lati del ponte come in Figura 1.5.

L'arco v_1 uscente da A_1 ed in tal senso orientato, incontra successivamente $l - 1$ punti doppi, alternativamente su w_2 e w_1 , contraddistinti dalle coppie di numerazione $(-t, t)$, $(-2t, 2t)$, \dots , $(-(l - 1)t, (l - 1)t)$ che indicano con il loro ordinamento il senso di percorrenza², ed infine si connette con B_2 . La stessa descrizione si ha simmetricamente per l'andamento dell'arco v_2 uscente da A_2 . Il nodo K si indica con $\mathbf{b}(l, t)$. In Figura 1.6 è illustrata la forma normale di Schubert del nodo figura otto $\mathbf{b}(5, 3)$. È facile vedere che $\mathbf{b}(l, t)$ è banale se e solo se $l = 1$ (e quindi $t = 1$).

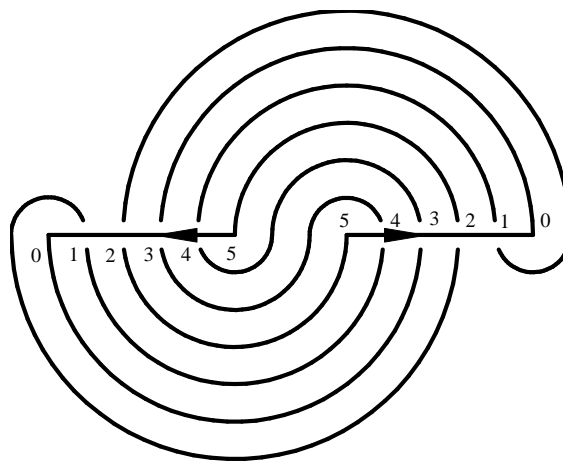


Figura 1.6: Forma normale di Schubert del nodo a otto $\mathbf{b}(5, 3)$.

²I numeri tra parentesi sono sempre da considerarsi $\pmod{2l}$.

Si ha la seguente classificazione dei nodi a due ponti.

Teorema 1.2.3. [26, Th. 2.1.3]

- (1) *I nodi a due ponti non banali $\mathbf{b}(l, t)$ e $\mathbf{b}(l', t')$ sono fortemente equivalenti se e solo se $l = l'$ e $t \equiv t' \pmod{l}$ oppure $tt' \equiv 1 \pmod{l}$.*
- (2) *I nodi a due ponti non banali $\mathbf{b}(l, t)$ e $\mathbf{b}(l', t')$ sono equivalenti se e solo se $l' = l$ e $t \equiv \pm t' \pmod{l}$ oppure $tt' \equiv \pm 1 \pmod{l}$.*

Proposizione 1.2.3. [26, Es. 2.1.2 e 2.1.4] *Valgono le seguenti proprietà:*

- (1) *l'immagine speculare di $\mathbf{b}(l, t)$ è $\mathbf{b}(l, -t)$, quindi il nodo a due ponti $\mathbf{b}(l, t)$ è anferico se e solo se $t^2 \equiv -1 \pmod{l}$;*
- (2) *i nodi a due ponti sono tutti invertibili.*

Utilizzando la forma normale di Schubert, è molto semplice calcolare una presentazione di Wirtinger per un nodo a due ponti: i generatori sono i cappi corrispondenti ai due ponti e la relazione si ottiene seguendo l'arco v_1 (oppure v_2) ed eseguendo i relativi coniugi dovuti alle relazioni di Wirtinger in corrispondenza dei sottopassi (vedi [7, Th. 3.4]). Si ottiene quindi il seguente risultato.

Proposizione 1.2.4. *Il gruppo del nodo a due ponti $\mathbf{b}(l, t)$ ammette la seguente presentazione*

$$\langle x, y \mid y^{\eta(t)} x^{\eta(2t)} y^{\eta(3t)} x^{\eta(4t)} \dots y^{\eta((2l-1)t)} x^{\eta(2lt)} \rangle,$$

dove $\eta : \mathbb{Z}_{2l} \rightarrow \{+1, -1\}$ è la funzione $\eta(j) = \begin{cases} +1 & \text{se } 1 \leq j \leq l, \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Forma normale di Conway. Questa forma deriva da una presentazione a trecce del nodo a due ponti.

Dato il nodo a due ponti $\mathbf{b}(l, t)$, supponiamo $1 \leq t \leq l$ in quanto gli altri casi sono le immagini speculari di questi (vedi Proposizione 1.2.3). Consideriamo la sequenza di equazioni dell'algoritmo euclideo (con $r_0 = l$ e $r_1 = t$):

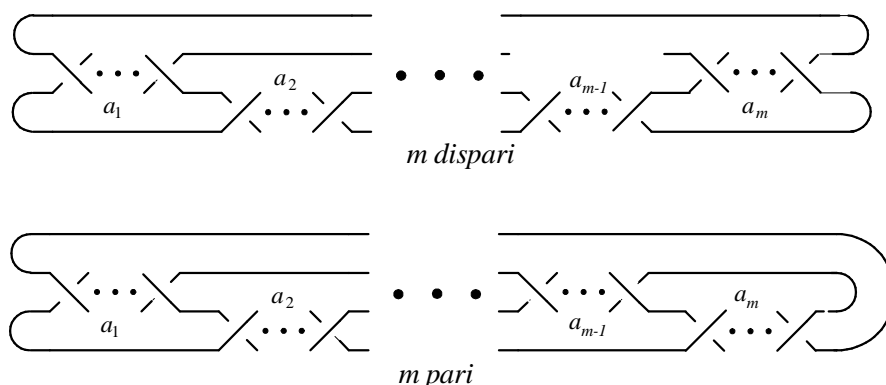


Figura 1.7: Forma normale di Conway di $\mathbf{b}(l, t) = [a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m]$.

$$\begin{aligned}
 r_0 &= a_1 r_1 + r_2, \\
 r_1 &= a_2 r_2 + r_3, \\
 &\vdots \\
 r_{m-2} &= a_{m-1} r_{m-1} + r_m, \\
 r_{m-1} &= a_m r_m,
 \end{aligned}$$

tale che $r_1 > r_2 > \dots > r_{m-1} > r_m = 1$.

L'algoritmo è univocamente determinato dalla coppia (l, t) e fornisce una sequenza di quozienti, detti *simboli di Conway*, $[a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m]$ che definisce la presentazione a trecce di $\mathbf{b}(l, t)$ illustrata in Figura 1.7.

Al nodo $\mathbf{b}(l, -t)$ viene associata la sequenza di quozienti $[-a_1, -a_2, \dots, -a_{m-1}, -a_m]$ dove il segno negativo indica che gli incroci avvengono in senso opposto a quello riportato in Figura 1.7. Il legame tra i parametri l e t ed i simboli di Conway ad essi associati è dato dalla seguente frazione continua:

$$\frac{l}{t} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_m}}}.$$

Osservazione 1.2.4. [26, Es. 2.1.7 e 2.1.9]

- (1) I nodi a due ponti con simboli di Conway $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ e $[a_1, a_2, \dots, a_m + \varepsilon, \varepsilon]$, dove $\varepsilon \in \{1, -1\}$, sono fortemente equivalenti.

- (2) I nodi a due ponti con simboli di Conway $[a_m, \dots, a_2, a_1]$ e $[(-1)^{m-1}a_1, (-1)^{m-1}a_2, \dots, (-1)^{m-1}a_m]$ sono fortemente equivalenti.

Dalla precedente osservazione e dal Teorema 1.2.3, seguono le condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza dei nodi a due ponti in forma normale di Conway.

Proposizione 1.2.5. [26, Th. 2.1.11] *Siano $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ insiemi di interi tali che $a_i a_j > 0$ e $b_i b_j > 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e nessuno tra $|a_1|$, $|b_1|$, $|a_m|$ e $|b_n|$ sia uguale a uno. Allora i nodi a due ponti con simboli di Conway, rispettivamente, $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ e $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ sono fortemente equivalenti se e solo se:*

- (1) $m = n$;
- (2) $a_i = b_i$, per ogni $i = 1, \dots, m$ oppure $a_i = (-1)^{m-1} b_{m+1-i}$, per ogni $i = 1, \dots, m$.

1.2.3 Nodi torici

Un *nodo torico* è un qualunque nodo che può essere immerso nel toro standard T in \mathbf{S}^3 . Siano m e l le curve disegnate in Figura 1.8. Chiameremo tali curve, rispettivamente, *meridiano standard* e *parallelo standard* di T . Sia $km + hl$ la classe di omologia intera del nodo torico orientato K in T , allora K è detto di tipo (k, h) ed è denotato con $\mathbf{t}(k, h)$. Si noti che vale $\gcd(k, h) = 1$.

Il nodo torico $\mathbf{t}(k, h)$ è banale se e solo se $k = \pm 1$ o $h = \pm 1$ (vedi [26, Th. 2.2.2]).

Si ha la seguente classificazione dei nodi torici.

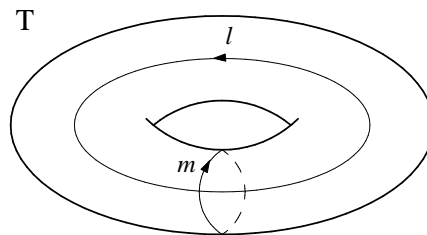


Figura 1.8: Meridiano e parallelo standard del toro T .

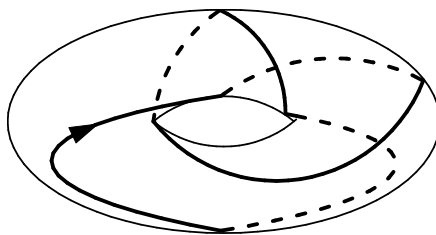


Figura 1.9: Nodo trifoglio $\mathbf{t}(3, -2)$.

Teorema 1.2.4. [26, Th. 2.2.2]

- (1) I nodi torici non banali $\mathbf{t}(k, h)$ e $\mathbf{t}(k', h')$ sono fortemente equivalenti se e solo se (k', h') è uguale a $(\varepsilon k, \varepsilon h)$ oppure a $(\varepsilon h, \varepsilon k)$, con $\varepsilon \in \{1, -1\}$.
- (2) I nodi torici non banali $\mathbf{t}(k, h)$ e $\mathbf{t}(k', h')$ sono equivalenti se e solo se (k', h') è uguale a $(\pm k, \pm h)$ o a $(\pm h, \pm k)$.

Proposizione 1.2.6. [26, Prop. 2.2.1] Valgono le seguenti proprietà:

- (1) l'immagine speculare di $\mathbf{t}(k, h)$ è $\mathbf{t}(k, -h)$, quindi i nodi torici non sono anferici;
- (2) l'inverso di $\mathbf{t}(k, h)$ è $\mathbf{t}(-k, -h)$, quindi i nodi torici sono invertibili.

Proposizione 1.2.7. [26, Prop. 6.1.16, Es. 7.4.4] [41, Th. 7.5.3]

- (1) Il gruppo del nodo torico $\mathbf{t}(k, h)$ ammette la seguente presentazione:

$$\langle x, y \mid x^k y^{-h} \rangle.$$

- (2) Il polinomio di Alexander del nodo torico $\mathbf{t}(k, h)$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{t}(k, h)}(u) = \frac{(u^{kh} - 1)(u - 1)}{(u^k - 1)(u^h - 1)}.$$

- (3) Il numero di ponti del nodo torico non banale $\mathbf{t}(k, h)$ è il minimo tra $|k|$ e $|h|$.

1.3 Rivestimenti ramificati

In questo paragrafo con il termine varietà indicheremo semplicemente uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e localmente euclideo.

Consideriamo il disco \mathbf{D}^2 come il sottoinsieme di \mathbb{C} definito da $\mathbf{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ e, fissato un intero positivo m , sia $p_m : \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{D}^2$ la mappa definita da $p_m(z) = z^m$. Ovviamente la restrizione di p_m a $\mathbf{D}^2 - 0$ è una proiezione di rivestimento a m -fogli. Sia inoltre $q_m : \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2} \rightarrow \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2}$ la mappa definita da $q_m = p_m \times \text{Id}_{\mathbf{D}^{k-2}}$. Anche in tal caso la restrizione di q_m a $(\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2}) - (0 \times \mathbf{D}^{k-2})$ è una proiezione di rivestimento a m -fogli.

Siano \widetilde{M} e M due varietà k -dimensionali (con $k \geq 2$) e sia $f : \widetilde{M} \rightarrow M$ una mappa suriettiva. Un punto \widetilde{Q} in \widetilde{M} è detto *punto singolare* per f , se f non è un omeomorfismo locale su \widetilde{Q} . Denotiamo con $S_f \subset \widetilde{M}$ l'insieme dei punti singolari di f . Inoltre, poniamo $B_f = f(S_f) \subset M$ e $\widetilde{B}_f = f^{-1}(B_f) \subset \widetilde{M}$; ovviamente si ha $S_f \subset \widetilde{B}_f$.

Una mappa suriettiva $f : \widetilde{M} \rightarrow M$ è una *proiezione di rivestimento ramificato* se ha le seguenti proprietà:

- (1) la restrizione $f|_{\widetilde{M} - \widetilde{B}_f} : \widetilde{M} - \widetilde{B}_f \rightarrow M - B_f$ di f è una proiezione di rivestimento ordinaria;
- (2) per ogni $\widetilde{Q} \in \widetilde{B}_f$ esiste un intorno \widetilde{N} di \widetilde{Q} in \widetilde{M} , un omeomorfismo $\widetilde{h} : \widetilde{N} \rightarrow \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2}$, un intorno N di $f(\widetilde{Q}) = Q$ in M , un omeomorfismo $h : N \rightarrow \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2}$ ed un intero positivo m tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (\widetilde{N}, \widetilde{N} \cap \widetilde{B}_f) & \xrightarrow{\widetilde{h}} & (\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2}, 0 \times \mathbf{D}^{k-2}) \\
 f|_{\widetilde{N}} \downarrow & & \downarrow q_m \\
 (N, N \cap B_f) & \xrightarrow{h} & (\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{k-2}, 0 \times \mathbf{D}^{k-2}).
 \end{array}$$

La terna (\widetilde{M}, f, M) , o semplicemente lo spazio \widetilde{M} , è detta *rivestimento ramificato* di M e l'intero m è detto *indice di ramificazione* del punto \widetilde{Q} . L'indice di ramificazione è costante su ogni componente connessa di \widetilde{B}_f . Si noti che i punti $\widetilde{Q} \in \widetilde{B}_f$ che hanno indice di ramificazione uno

sono in realtà regolari, cioè appartengono a $\widetilde{B}_f - S_f$. Chiamiamo B_f , S_f e \widetilde{B}_f , rispettivamente, *insieme di ramificazione*, *insieme singolare* e *insieme pseudo-singolare* di f ; inoltre un punto di B_f o di \widetilde{B}_f è detto, rispettivamente, *punto di ramificazione* o *punto pseudo-singolare* di f . Infine il rivestimento $(\widetilde{M} - \widetilde{B}_f, f|_{\widetilde{M} - \widetilde{B}_f}, M - B_f)$, o semplicemente $\widetilde{M} - \widetilde{B}_f$, è detto *rivestimento non ramificato associato* a (\widetilde{M}, f, M) . Si noti che, per la condizione (2), gli insiemi B_f e \widetilde{B}_f sono sottovarietà $(k-2)$ -dimensionali, localmente piatte e proprie di, rispettivamente, M e \widetilde{M} .

Due rivestimenti ramificati $(\widetilde{M}_i, f_i, M_i)$, con $i = 1, 2$, si dicono *equivalenti* se esistono un omeomorfismo $k : \widetilde{M}_1 \rightarrow \widetilde{M}_2$ ed un omeomorfismo $h : M_1 \rightarrow M_2$ tali che $h(B_{f_1}) = B_{f_2}$ e $f_2 k = h f_1$. Nel caso in cui $M_1 = M_2$, diremo che i due rivestimenti sono equivalenti se è verificata la condizione sopra per $h = \text{Id}_{M_1}$.

Esiste una nozione più generale di rivestimento ramificato, introdotta da R.H. Fox, in cui l'insieme di ramificazione non è necessariamente una sottovarietà propria e localmente piatta e in cui lo spazio base è uno spazio topologico di Hausdorff localmente connesso (vedi [16]). Nello stesso articolo Fox dimostra che un rivestimento ramificato è unicamente determinato dall'insieme di ramificazione e dall'associato rivestimento non ramificato.

Un rivestimento ramificato si dice, quindi, *ad n -fogli* o *regolare* se l'associato rivestimento non ramificato è rispettivamente, *ad n -fogli* o *regolare*.

Osservazione 1.3.1. Dato un rivestimento ramificato ad n -fogli $f : \widetilde{M} \rightarrow M$, indichiamo con $i_f(\widetilde{Q})$, l'indice di ramificazione del punto $\widetilde{Q} \in \widetilde{B}_f$. Per ogni $Q \in B_f$ si ha:

$$\sum_{\widetilde{Q} \in f^{-1}(Q)} i_f(\widetilde{Q}) = n.$$

Sia $(\widetilde{M}_i, f_i, M_i)$ un rivestimento ramificato e sia $P \in M - B_f$. Per ogni punto $\widetilde{P} \in f^{-1}(P)$ ed ogni $\alpha \in \pi_1(M - B_f, P)$, definiamo \widetilde{P}_α come il punto finale del sollevamento di α con punto iniziale \widetilde{P} . In tal modo, attraverso la corrispondenza $\widetilde{P} \in f^{-1}(P) \rightarrow \widetilde{P}_\alpha \in f^{-1}(P)$, otteniamo una biezione $\omega_f(\alpha) : f^{-1}(P) \rightarrow f^{-1}(P)$. Inoltre la corrispondenza che associa ad α la biezione $\omega_f(\alpha)$, induce un omomorfismo ω_f da $\pi_1(M - B_f, P)$ al gruppo simmetrico sull'insieme $f^{-1}(P)$, detto *rappresentazione di monodromia* o più

semplicemente *monodromia*. Poiché $\pi_1(M - B_f, P)$ agisce transitivamente³ su $f^{-1}(P)$, la monodromia è una rappresentazione transitiva.

Si ha il seguente teorema per i rivestimenti ramificati finiti.

Teorema 1.3.1. [26, Th. B.5.3] *Sia M una varietà k -dimensionale e sia B una $(k - 2)$ -sottovarietà propria e localmente piatta. Le classi di equivalenza di rivestimenti ramificati ad n -fogli, connessi su M con insieme di ramificazione B corrispondono biunivocamente alle classi di coniugio delle rappresentazioni transitive $\omega_f : \pi_1(M - B, P) \rightarrow \Sigma_n$, con $P \in M - B$ punto base, che mandano ogni meridiano⁴ di B in M in un elemento non banale di Σ_n .*

Quindi, in termini di monodromie, due rivestimenti ramificati ad n -fogli $f_1 : \widetilde{M}_1 \rightarrow M_1$ e $f_2 : \widetilde{M}_2 \rightarrow M_2$ con monodromie, rispettivamente, ω_{f_1} e ω_{f_2} , si dicono *equivalenti* se e solo se esistono un automorfismo λ di Σ_n ed un omeomorfismo $h : M_1 \rightarrow M_2$ tali che $h(B_{f_1}) = B_{f_2}$ e $\lambda\omega_{f_1} = \omega_{f_2}h_*$, dove $h_* : \pi_1(M_1 - B_{f_1}, P) \rightarrow \pi_1(M_2 - B_{f_2}, h(P))$ è l'omomorfismo indotto da h sui gruppi fondamentali e $P \in M_1 - B_{f_1}$ è un punto base. Di nuovo, nel caso in cui $M_1 = M_2$ la condizione deve essere verificata per $h = \text{Id}_{M_1}$.

Chiameremo *abeliano* un rivestimento ramificato $f : \widetilde{M} \rightarrow M$ se è abeliano l'associato rivestimento non ramificato; in altre parole se esiste un'azione di un gruppo abeliano G su $\widetilde{M} - \widetilde{B}_f$ tale che $M - B_f \cong (\widetilde{M} - \widetilde{B}_f)/G$. Questo equivale al fatto che l'immagine della rappresentazione di monodromia ω_f è un sottogruppo del gruppo simmetrico sull'insieme $f^{-1}(P)$, con $P \in M - B_f$, isomorfo a G e quindi ω_f si fattorizza attraverso l'epimorfismo $H_1(\widetilde{M} - \widetilde{B}_f) \rightarrow G$. In particolare, se G è un gruppo ciclico allora il rivestimento è detto *ciclico*. In questa tesi ci occuperemo principalmente di rivestimenti ciclici ad n -fogli. In tal caso G sarà \mathbb{Z}_n , cioè il gruppo ciclico di ordine n .

Di grande interesse sono i rivestimenti ramificati di varietà tridimensionali

³Un gruppo G agisce transitivamente su un insieme X se esiste un'azione $A : G \times X \rightarrow X$ e se per ogni $x_1, x_2 \in X$ esiste $g \in G$ tale che $A(g, x_1) = x_2$.

⁴Fissiamo una triangolazione su M e indichiamo con $St(v)$ la stella di un vertice v della triangolazione. Fissato un punto $P \in M - B$, un *meridiano* di B in M è un elemento di $\pi_1(M - B, P)$ rappresentato da $bc b^{-1}$, dove b è un arco che connette P a $St(v)$, con v vertice di B , e c è un generatore di $\pi_1(St(v) - B, P) \cong \mathbb{Z}$.

in cui l'insieme di ramificazione è un nodo. Tale interesse è soprattutto dovuto al seguente teorema.

Teorema 1.3.2. [24, 37] *Ogni 3-varietà chiusa, connessa e orientabile è un rivestimento ramificato di \mathbf{S}^3 a 3-fogli che ha per insieme di ramificazione un nodo.*

1.4 Mapping class group

In questo paragrafo descriveremo le principali proprietà e caratteristiche dei mapping class group di una superficie chiusa ed orientabile.

Sia T_g una superficie chiusa ed orientabile di genere g e sia $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ un insieme finito di punti distinti di T_g , che chiameremo *punture*. Indichiamo con $\mathcal{H}(T_g)$ il gruppo degli automorfismi di T_g che conservano l'orientazione e con $\mathcal{H}(T_g, \mathcal{P})$ il sottogruppo di $\mathcal{H}(T_g)$ contenente gli automorfismi $h : T_g \rightarrow T_g$ tali che $h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Il *mapping class group puntato* di T_g relativo a \mathcal{P} è $\pi_0(\mathcal{H}(T_g, \mathcal{P}), \text{Id})$, cioè il gruppo delle classi di isotopia degli elementi di $\mathcal{H}(T_g, \mathcal{P})$. Per semplificare le notazioni, denoteremo con lo stesso simbolo un omeomorfismo e la sua classe di isotopia.

A meno di isomorfismo, il mapping class group puntato di una fissata superficie T_g dipende solo dalla cardinalità n di \mathcal{P} . Quindi, possiamo semplicemente parlare del mapping class group n -puntato di T_g e denotarlo con $\text{MCG}_n(T_g)$. Il *mapping class group puro n -puntato* di T_g è il sottogruppo $\text{PMCG}_n(T_g)$ di $\text{MCG}_n(T_g)$ formato dagli elementi che fissano punto per punto le punture. Si ha la seguente successione esatta:

$$1 \rightarrow \text{PMCG}_n(T_g) \rightarrow \text{MCG}_n(T_g) \rightarrow \Sigma_n \rightarrow 1,$$

dove Σ_n è il gruppo simmetrico di ordine n .

Il *mapping class group* di T_g è il gruppo $\text{MCG}_0(T_g) = \text{PMCG}_0(T_g)$ che verrà denotato semplicemente con $\text{MCG}(T_g)$.

La relazione tra $\text{MCG}_n(T_g)$ e $\text{MCG}(T_g)$ è strettamente legata ai gruppi di trecce di una superficie. Sia $\prod_{i=1}^n T_g$ la varietà prodotto e sia $F_n(T_g)$ il seguente sottospazio topologico:

$$F_n(T_g) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n T_g \mid x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

Fissato un punto base $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in F_n(\mathbb{T}_g)$, l' n -gruppo di trecce puro di \mathbb{T}_g è $\pi_1(F_n(\mathbb{T}_g), \mathbf{x}^0)$. Sia inoltre $\mathcal{F}(T_g, \mathcal{P})$ il sottogruppo di $\mathcal{H}(T_g, \mathcal{P})$ contenente gli elementi che fissano punto per punto le punture. Si noti che $\text{PMCG}_n(\mathbb{T}_g) = \pi_0(\mathcal{F}(T_g, \mathcal{P}), \text{Id})$. Si hanno i seguenti teoremi.

Teorema 1.4.1. [6, Th. 4.1] *La mappa $e : \mathcal{H}(T_g) \rightarrow F_n(\mathbb{T}_g)$ definita da:*

$$f \rightarrow (f(P_1), \dots, f(P_n))$$

è una fibrazione con fibre omeomorfe a $\mathcal{F}(T_g, \mathcal{P})$, con $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$.

Teorema 1.4.2. [6, Th. 4.2] *Per ogni coppia di interi $g, n \geq 0$ sia*

$$i_{g,n}^* : \text{PMCG}_n(\mathbb{T}_g) \rightarrow \text{MCG}(\mathbb{T}_g)$$

l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i_{g,n} : \mathcal{F}(T_g, \mathcal{P}) \hookrightarrow \mathcal{H}(T_g)$, con $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$. Allora $\ker i_{g,n}^ \cong \pi_1(F_n(\mathbb{T}_g), \mathbf{P}^0)$, con $\mathbf{P}^0 = (P_1, \dots, P_n)$, se $g \geq 2$. Se $g = 1$ ed $n \geq 2$ oppure $g = 0$ ed $n \geq 3$ allora si ha $\ker i_{g,n}^* \cong \pi_1(F_n(\mathbb{T}_g), \mathbf{P}^0) / Z(\pi_1(F_n(\mathbb{T}_g), \mathbf{P}^0))$, dove $Z(\pi_1(F_n(\mathbb{T}_g), \mathbf{P}^0))$ denota il centro di $\pi_1(F_n(\mathbb{T}_g), \mathbf{P}^0)$.*

Ora vediamo quali sono i generatori di $\text{MCG}(\mathbb{T}_g)$. Sia ς una curva semplice chiusa su \mathbb{T}_g . Scegliamo un'immersione $l : [0, 1] \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}_g$ del cilindro $[0, 1] \times \mathbf{S}^1$ in \mathbb{T}_g tale che $\varsigma = \{l(1/2, z) \mid z \in \mathbf{S}^1\}$. Il *Dehn twist (destra) lungo ς* è l'automorfismo $t_\varsigma \in \mathcal{H}(T_g)$ definito sull'immagine di l da

$$(t_\varsigma \circ l)(s, z) = (s, e^{2i\pi s} z) \quad s \in [0, 1], z \in \mathbf{S}^1,$$

ed esteso tramite l'identità a tutto \mathbb{T}_g .

Chiaramente le classi di isotopia dei Dehn twists sono elementi di $\text{MCG}(\mathbb{T}_g)$ ed è un risultato ben noto che essi sono in effetti un insieme di generatori per $\text{MCG}(\mathbb{T}_g)$ e $\text{PMCG}_n(\mathbb{T}_g)$ (vedi [13, 31, 32]). Vediamone alcune proprietà.

Proposizione 1.4.1. [6, Lemma 4.6.2 e 4.6.7]

- (1) *Siano ς_1 e ς_2 due curve semplici chiuse su \mathbb{T}_g tali che $|\varsigma_1 \cap \varsigma_2| = 1$ allora esiste una curva semplice e chiusa v su \mathbb{T}_g tale che $t_v(\varsigma_1) = \varsigma_2$.*
- (2) *Siano ς_1 e ς_2 due curve semplici chiuse su \mathbb{T}_g tali che esiste $h \in \mathcal{H}(T_g)$ per cui $h(\varsigma_1) = \varsigma_2$ allora*

$$t_{\varsigma_2} = h t_{\varsigma_1} h^{-1}.$$

Esistono alcune relazioni classiche utilizzate nelle presentazioni di $\text{MCG}(\mathbb{T}_g)$ e $\text{MCG}_n(\mathbb{T}_g)$ che illustreremo brevemente (vedi [17]).

Trecce: Siano α, β due curve chiusi semplici su \mathbb{T}_g . Allora:

$$\begin{aligned}\alpha \cap \beta = \emptyset &\Rightarrow t_\alpha t_\beta = t_\beta t_\alpha, \\ |\alpha \cap \beta| = 1 &\Rightarrow t_\alpha t_\beta t_\alpha = t_\beta t_\alpha t_\beta.\end{aligned}$$

Lanterne: Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ le curve su \mathbb{T}_g illustrate in Figura 1.10 a). Allora:

$$t_{\beta_1} t_{\beta_2} t_{\beta_3} t_{\beta_4} = t_{\alpha_1} t_{\alpha_3} t_{\alpha_2} = t_{\alpha_2} t_{\alpha_1} t_{\alpha_3} = t_{\alpha_3} t_{\alpha_2} t_{\alpha_1}.$$

Catene: Siano $\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2$ le curve su \mathbb{T}_g illustrate in Figura 1.10 b). Allora:

$$(t_{\beta_1} t_\alpha t_{\beta_2})^4 = t_{\delta_1} t_{\delta_2}.$$

Stelle: Siano $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ le curve su \mathbb{T}_g illustrate in Figura 1.10 c). Allora:

$$(t_{\beta_1} t_{\beta_2} t_{\beta_3} t_\alpha)^3 = t_{\delta_1} t_{\delta_2} t_{\delta_3}.$$

In [54], Wajnryb dà una presentazione di $\text{MCG}(\mathbb{T}_g)$ utilizzando un numero finito minimale di generatori, che sono i Dehn twists lungo le curve illustrate in Figura 1.11 e con relazioni di tipo treccia, lanterna e catena.

In [18], Gervais dà una presentazione finita di $\text{MCG}(\mathbb{T}_{g,n})$, dove $\mathbb{T}_{g,n}$ è una superficie di genere g con n componenti di bordo (in tal caso si considerano gli omeomorfismi che coincidono con l'identità sul bordo) utilizzando come generatori i Dehn twists lungo le curve illustrate in Figura 1.12 e con relazioni di tipo treccia e stella. Da tale presentazione si può ottenere una presentazione finita di $\text{PMCG}_n(\mathbb{T}_g)$ aggiungendo le relazioni $t_{\gamma_{i,i+1}} = 1$, per $i = 2g-1, \dots, 2g+n-2$ dove $\gamma_{i,i+1}$ è una curva parallela all' $(i-2g+2)$ -esima componente di bordo (vedi Figura 1.12).

Inoltre una presentazione di tutti i mapping class group puntati può essere trovata in [30] in termini di gruppi di Artin.

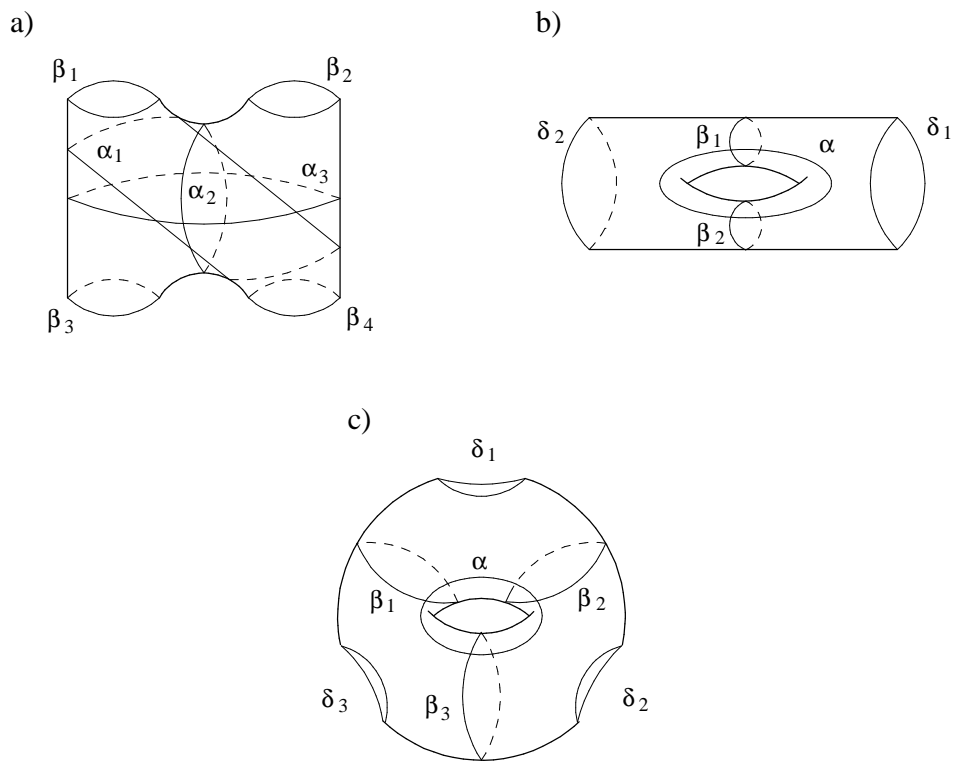


Figura 1.10: Relazioni classiche nei mapping class group.

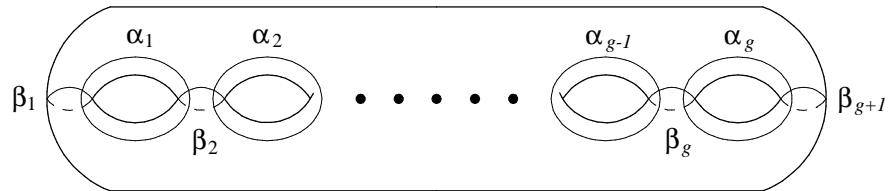


Figura 1.11: Generatori di Wirtinger.

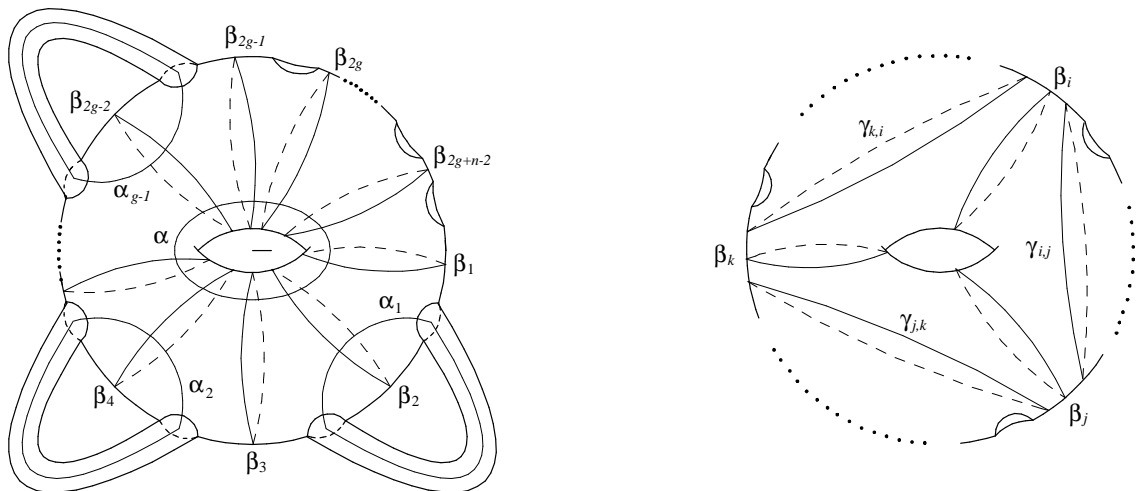


Figura 1.12: Generatori di Gervais.

Capitolo 2

Rappresentazione degli (1,1)-nodi

Sia $\mathcal{K}_{1,1}$ la classe degli (1,1)-nodi e sia $T = T_1$ un toro, cioè una superficie chiusa e orientabile di genere 1. In questo capitolo descriveremo la rappresentazione che è al centro di tutta la tesi e cioè un'applicazione suriettiva $\Theta : \text{MCG}_2(T) \rightarrow \mathcal{K}_{1,1}$. Tale rappresentazione ci permetterà di ottenere diversi risultati sugli (1,1)-nodi e sui loro rivestimenti ciclici che verranno illustrati nel resto della tesi.

I risultati descritti in questo capitolo sono contenuti anche in [9].

2.1 Il gruppo $\text{MCG}_2(T)$

In base agli articoli citati nel Paragrafo 1.4, un insieme di generatori per $\text{MCG}_2(T)$ è dato dalla rotazione ρ di π radianti attorno all'asse $x - x$ e dai tre Dehn twists $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$ rispettivamente lungo le curve α, β, γ illustrate in Figura 2.1. Poiché ρ commuta con gli altri generatori, si ha

$$\text{MCG}_2(T) \cong \text{PMCG}_2(T) \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Si ha la seguente presentazione per $\text{PMCG}_2(T)$ (vedi [45]):

$$\langle t_\alpha, t_\beta, t_\gamma \mid t_\alpha t_\beta t_\alpha = t_\beta t_\alpha t_\beta, t_\alpha t_\gamma t_\alpha = t_\gamma t_\alpha t_\gamma, t_\beta t_\gamma = t_\gamma t_\beta, (t_\alpha t_\beta t_\gamma)^4 = 1 \rangle. \quad (2.1)$$

Come è ben noto, $\text{MCG}(T)$ è generato da t_α e t_β (in questo gruppo ovviamente si ha $t_\beta = t_\gamma$) ed è isomorfo a $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ attraverso l'applicazione che

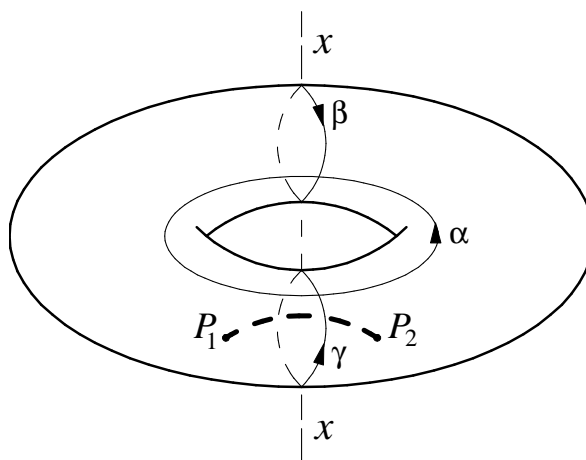


Figura 2.1: Generatori di $\text{MCG}_2(\mathbb{T})$.

associa a $\psi \in \text{MCG}(\mathbb{T})$ la matrice che rappresenta l'isomorfismo indotto da ψ sul primo gruppo di omologia $H_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, rispetto ad una fissata base \mathcal{B} . Scegliendo $\mathcal{B} = (\beta, \alpha)$ e componendo $i_{1,2}^* : \text{PMCG}_2(\mathbb{T}) \rightarrow \text{MCG}(\mathbb{T})$ (vedi Teorema 1.4.2) con tale isomorfismo otteniamo l'epimorfismo:

$$\Omega : \text{PMCG}_2(\mathbb{T}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

definito da $\Omega(t_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Omega(t_\beta) = \Omega(t_\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il gruppo $\ker \Omega$ avrà un ruolo fondamentale nella rappresentazione che andremo a definire. Per studiare la sua struttura consideriamo gli elementi $\tau_m = t_\beta t_\gamma^{-1}$ e $\tau_l = t_\eta t_\alpha^{-1}$, dove η è la curva disegnata in Figura 2.2.

Nella stessa figura è illustrata localmente l'azione di τ_m e τ_l su un tratto di curva nei pressi di una delle due punture (diciamo P_2). Sostanzialmente l'effetto di τ_m e τ_l è di far scivolare P_2 rispettivamente lungo un meridiano standard e lungo un parallelo standard del toro. Si osservi che, poiché $\eta = \tau_m^{-1}(\alpha)$, dalla Proposizione 1.4.1 segue che $t_\eta = \tau_m^{-1} t_\alpha \tau_m$.

Proposizione 2.1.1. *Il gruppo $\ker \Omega$ è generato liberamente da $\tau_m = t_\beta t_\gamma^{-1}$ e $\tau_l = t_\eta t_\alpha^{-1}$, con $t_\eta = \tau_m^{-1} t_\alpha \tau_m$.*

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{P} = \{P_1, P_2\}$. La fibrazione

$$e : \mathcal{H}(\mathbb{T}) \rightarrow \text{F}_2(\mathbb{T}),$$

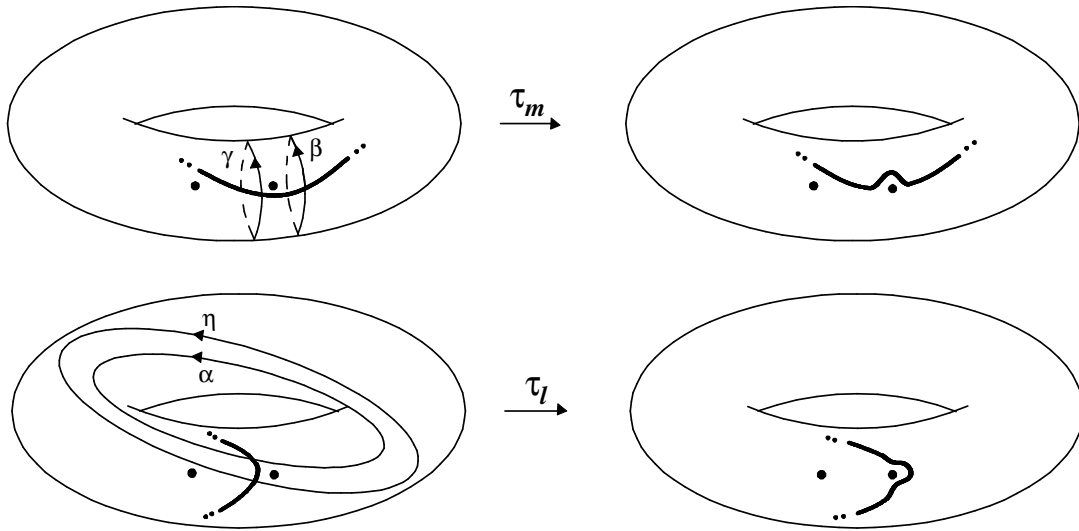


Figura 2.2: Azione di τ_m e τ_l .

che ha fibre omeomorfe a $\mathcal{F}(T, \mathcal{P})$ (vedi Teorema 1.4.1), induce la seguente successione esatta sui gruppi di omotopia:

$$\dots \xrightarrow{e^*} \pi_1(F_2(T), (P_1, P_2)) \xrightarrow{d^*} \pi_0(\mathcal{F}(T, \mathcal{P}), \text{Id}) \xrightarrow{i_{1,2}^*} \pi_0(\mathcal{H}(T), \text{Id}) \rightarrow 1.$$

Ricordando che $\pi_0(\mathcal{F}(T, \mathcal{P}), \text{Id}) = \text{PMCG}_2(T)$ e $\pi_0(\mathcal{H}(T), \text{Id}) = \text{MCG}(T)$, si ha:

$$\ker \Omega \cong \ker i_{1,2}^* = \text{im } d^* \cong \pi_1(F_2(T), (P_1, P_2)) / \ker d^*.$$

Inoltre da [5, Th. 5] si ha che $\pi_1(F_2(T), (P_1, P_2))$ ammette la seguente presentazione

$$\langle \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 \mid 1 = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2] = [\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2] = [\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_j] = [\bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_j], j = 1, 2 \rangle,$$

dove $\bar{\alpha}_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\bar{\beta}_1 = (\beta_1, \beta_2)$, $\bar{\alpha}_2 = (P_1, \alpha_2)$, $\bar{\beta}_2 = (P_1, \beta_2)$ dove α_i e β_i sono i cappi disegnati in Figura 2.3 e P_i denota il cappio costante basato sul punto P_i . Da [4, Cor. 1.3], $\ker d^*$ è generato liberamente da $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\beta}_1$. Quindi $\ker \Omega$ è il gruppo libero generato da $d^*(\bar{\alpha}_2)$ e $d^*(\bar{\beta}_2)$, che sono rispettivamente τ_l e τ_m . \square

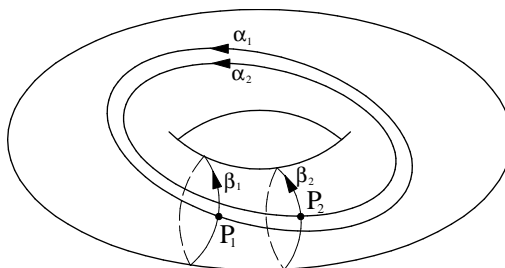


Figura 2.3: I cappi α_1 , α_2 , β_1 , e β_2 .

2.2 (1, 1)-nodi e $\text{MCG}_2(\mathbf{T})$

Richiamiamo brevemente la definizione di (1, 1)-nodo introdotta nella Sottosezione 1.2.1. Un (1, 1)-*nodo* K è un nodo contenuto in una 3-varietà di genere minore od uguale ad uno, ossia in uno spazio lenticolare $L(p, q)$ (compresi $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 = L(0, 1)$ ed $\mathbf{S}^3 = L(1, 0)$) che ammette una (1, 1)-decomposizione:

$$(L(p, q), K) = (H, A) \cup_{\varphi} (H', A'),$$

dove A e A' sono archi banali propriamente immersi in, rispettivamente, H e H' e $\varphi : (\partial H', \partial A') \rightarrow (\partial H, \partial A)$ è un omeomorfismo d'incollamento (vedi Figura 2.4). Per comodità, supponiamo che H e H' siano immersi in \mathbb{R}^3 in modo standard (cioè come illustrato in Figura 2.4), fissiamo su di essi l'orientazione standard (cioè quella indotta da \mathbb{R}^3) e scegliamo φ in modo tale che rovesci l'orientazione¹ indotta da H' e H su, rispettivamente, $\partial H'$ e ∂H .

La famiglia degli (1, 1)-nodi contiene i nodi torici (nella Sezione 2.5 viene descritta una loro (1, 1)-decomposizione naturale) e i nodi a due ponti (vedi Osservazione 1.2.2) in \mathbf{S}^3 .

In generale, un (1, 1)-nodo sarà definito tramite una sua (1, 1)-decomposizione e non come sottovarietà della varietà in cui è contenuto. Quindi è necessario introdurre un nuovo concetto di equivalenza per gli (1, 1)-nodi, che ci permetta di confrontare nodi che non stanno necessariamente nella stessa varietà (condizione necessaria per applicare il criterio di equivalenza introdotto nella Sezione 1.2), ma più generalmente

¹È sempre possibile, visto che esiste un automorfismo di $(\partial H, \partial A)$ che rovescia l'orientazione.

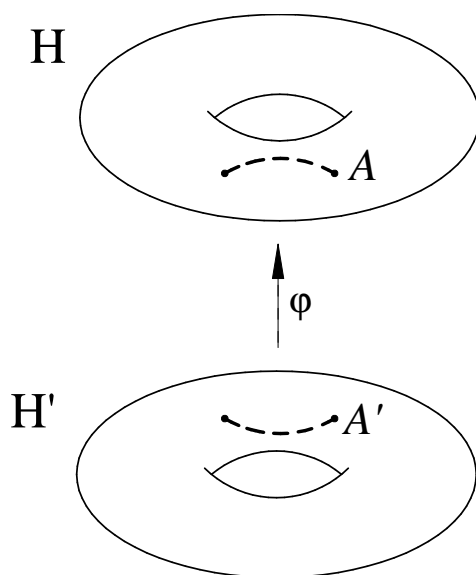


Figura 2.4: Una (1, 1)-decomposizione.

in varietà omeomorfe. Diremo che due (1, 1)-nodi K_1 e K_2 con (1, 1)-decomposizioni, rispettivamente, $(L(p_1, q_1), K_1) = (H_1, A_1) \cup_{\varphi_1} (H'_1, A'_1)$, e $(L(p_2, q_2), K_2) = (H_2, A_2) \cup_{\varphi_2} (H'_2, A'_2)$, sono equivalenti se esistono due omeomorfismi $f : (H_1, A_1) \rightarrow (H_2, A_2)$ ed $f' : (H'_1, A'_1) \rightarrow (H'_2, A'_2)$ che rendono commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 (\partial H'_1, \partial A'_1) & \xrightarrow{\varphi_1} & (\partial H_1, \partial A_1) \\
 f'_{|(\partial H'_1, \partial A'_1)} \downarrow & & \downarrow f_{|(\partial H_1, \partial A_1)} \\
 (\partial H'_2, \partial A'_2) & \xrightarrow{\varphi_2} & (\partial H_2, \partial A_2).
 \end{array}$$

Sia ora $K \subset L(p, q)$ un (1, 1)-nodo con una (1, 1)-decomposizione $(L(p, q), K) = (H, A) \cup_{\varphi} (H', A')$ e sia $\mu : (H, A) \rightarrow (H', A')$ un fissato omeomorfismo che rovescia l'orientazione allora $\psi = \varphi\mu|_{\partial H}$ è un automorfismo di $(\partial H, \partial A) = (T, \{P_1, P_2\})$ che conserva l'orientazione. Inoltre, poiché due omeomorfismi d'incollamento isotopi producono (1, 1)-nodi equivalenti, otteniamo in modo naturale un'applicazione suriettiva dal mapping class group 2-puntato del toro $MCG_2(T)$ alla classe $\mathcal{K}_{1,1}$ degli (1, 1)-nodi

$$\Theta : \psi \in MCG_2(T) \mapsto K_{\psi} \in \mathcal{K}_{1,1}.$$

Dato che ρ commuta con gli altri generatori di $\text{MCG}_2(T)$, ogni elemento ψ di $\text{MCG}_2(T)$ può essere scritto come $\psi = \psi' \rho^k$, con $k \in \{0, 1\}$ e $\psi' \in \text{PMCG}_2(T)$. Inoltre, poiché ρ può essere esteso ad un omeomorfismo della coppia (H, A) , gli (1,1)-nodi K_ψ e $K_{\psi'}$ sono equivalenti. Quindi, per la nostra discussione è sufficiente considerare la restrizione

$$\Theta' = \Theta|_{\text{PMCG}_2(T)} : \psi \in \text{PMCG}_2(T) \mapsto K_\psi \in \mathcal{K}_{1,1}.$$

Osservazione 2.2.1. Sia $\psi \in \text{PMCG}_2(T)$ tale che $\Omega(\psi) = \begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix}$, allora K_ψ è un (1,1)-nodo nello spazio lenticolare $L(p, q)$, e quindi è un nodo in \mathbf{S}^3 se e solo se $p = \pm 1$ (vedi [35].)

2.3 Il gruppo fondamentale

In questa sezione calcoleremo il gruppo fondamentale di un (1,1)-nodo, applicando il teorema di Seifert-Van Kampen ad una sua (1,1)-decomposizione. Per fare questo, fissiamo un punto base $*$ e definiamo i cappi $\bar{\alpha} = \xi \cdot \alpha \cdot \xi^{-1}$, $\bar{\beta} = \xi_1 \cdot \beta \cdot \xi_1^{-1}$ e $\bar{\gamma} = \xi_2 \cdot \gamma \cdot \xi_2^{-1}$, dove ξ, ξ_1, ξ_2 sono gli archi che connettono $*$ con, rispettivamente, α, β e γ , come disegnato in Figura 2.5.

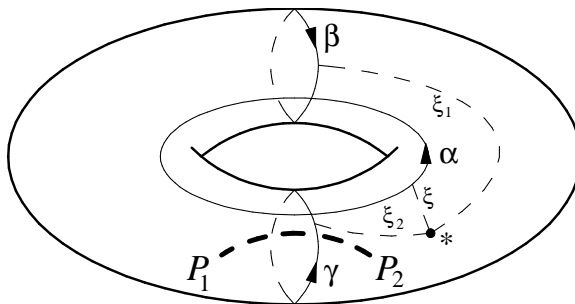


Figura 2.5: Generatori di $\pi_1(L(p, q) - K_\psi, *)$.

È facile vedere che $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ sono omologhi a, rispettivamente, α, β e γ . Inoltre poniamo $\bar{\alpha}' = \mu(\bar{\alpha}), \bar{\beta}' = \mu(\bar{\beta}), \bar{\gamma}' = \mu(\bar{\gamma})$ e $*' = \mu(*)$. Si osservi che, a meno di isotopia $*' = \varphi^{-1}(*)$. Le classi di omotopia di $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ generano $\pi_1(\partial H - \partial A, *)$ e le classi di omotopia di $\bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}'$ generano $\pi_1(\partial H' - \partial A', *')$. Per semplificare le notazioni, useremo lo stesso simbolo per rappresentare

un cappio (risp. un ciclo) e la sua classe di omotopia (risp. omologia) e per rappresentare una mappa e l'omomorfismo indotto da questa sui gruppi fondamentali e sui gruppi di omologia.

Proposizione 2.3.1. *Il gruppo fondamentale di un $(1, 1)$ -nodo $K_\psi \subset L(p, q)$ ammette la presentazione*

$$\pi_1(L(p, q) - K_\psi, *) = \langle \bar{\alpha}, \bar{\gamma} \mid i\psi(\bar{\beta}) \rangle,$$

dove $i : \pi_1(\partial H - \partial A, *) \rightarrow \pi_1(H - A, *)$ è l'omomorfismo indotto dall'inclusione $\partial H - \partial A \subset H - A$.

Dimostrazione. Chiaramente si ha che $\pi_1(H - A, *) = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \mid \bar{\beta} \rangle$ e $\pi_1(H' - A', *) = \langle \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}' \mid \bar{\beta}' \rangle$. Applicando il Teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo

$$\begin{aligned} \pi_1(L(p, q) - K, *) &= \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}' \mid \bar{\beta}, \bar{\beta}', \varphi(\bar{\alpha}')\bar{\alpha}'^{-1}, \varphi(\bar{\beta}')\bar{\beta}'^{-1}, \varphi(\bar{\gamma}')\bar{\gamma}'^{-1} \rangle \\ &= \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \mid \bar{\beta}, \psi(\bar{\beta}) \rangle = \langle \bar{\alpha}, \bar{\gamma} \mid i\psi(\bar{\beta}) \rangle, \end{aligned}$$

che completa la dimostrazione. \square

Osservazione 2.3.1. In realtà gli elementi di $MCG_2(T)$ agiscono sull'omotopia libera² di $T - \{P_1, P_2\}$ e non su $\pi_1(T - \{P_1, P_2\}, *)$. Infatti in generale se ψ_1 ed ψ_2 sono due rappresentanti dello stesso elemento di $MCG_2(T)$, l'azione di ψ_1 ed ψ_2 su $\pi_1(T - \{P_1, P_2\}, *)$ è uguale solo a meno di coniugio, cioè esiste $x_0 \in \pi_1(T - \{P_1, P_2\}, *)$ tale che $\psi_2(x) = x_0\psi_1(x)x_0^{-1}$ per ogni $x \in \pi_1(T - \{P_1, P_2\}, *)$. Questo implica che $\psi_1(x) = 1$ in $\pi_1(T - \{P_1, P_2\}, *)$ se e solo se $\psi_2(x) = 1$ e quindi ha senso la presentazione del gruppo fondamentale di un $(1, 1)$ -nodo enunciata nella proposizione precedente.

Il fatto che gli $(1, 1)$ -nodi abbiano un gruppo fondamentale che ammette una presentazione con due generatori ed un unico relatore è una proprietà molto forte. Infatti, grazie ad un risultato di Norwood [44], ciò implica che ogni $(1, 1)$ -nodo in \mathbf{S}^3 è primo e quindi è classificato dal suo gruppo fondamentale (vedi Proposizione 1.2.1). Anche i nodi con numero di tunnel uno, che contengono strettamente gli $(1, 1)$ -nodi (vedi Osservazione 1.2.3), hanno gruppo fondamentale che ammette una presentazione con due generatori ed un relatore e in [48] si congettura il viceversa.

²Ossia sull'insieme delle classi di omotopia di cappi non basati.

Dalla Proposizione 2.3.1 segue direttamente il calcolo del primo gruppo di omologia, osservando che $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ è un insieme di generatori libero per $H_1(\partial H - \partial A)$ e che l'Osservazione 2.2.1 implica che per un (1,1)-nodo $K_\psi \subset L(p, q)$ vale la relazione omologica $\psi(\beta) = p\alpha + q'\beta + q''\gamma$ (dove $q' + q'' = q$).

Corollario 2.3.1. *Sia K_ψ sia un (1,1)-nodo in $L(p, q)$ allora*

$$H_1(L(p, q) - K_\psi) = \langle \alpha, \gamma \mid p\alpha + q''\gamma \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\gcd(p, q'')},$$

dove q'' è unicamente determinato dalla relazione omologica

$$\psi(\beta) = p\alpha + q'\beta + q''\gamma.$$

Per calcolare esplicitamente la classe di omotopia di $\psi(\bar{\beta})$, nella tabella seguente sono elencate le azioni di $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$ e dei loro inversi sulle classi di omotopia di $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$.

	t_α	t_α^{-1}	t_β	t_β^{-1}	t_γ	t_γ^{-1}
$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}^{-1}\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}\bar{\gamma}^{-1}$	$\bar{\alpha}\bar{\gamma}$
$\bar{\beta}$	$\bar{\alpha}\bar{\beta}$	$\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$
$\bar{\gamma}$	$\bar{\alpha}\bar{\gamma}$	$\bar{\alpha}^{-1}\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}$

(2.2)

Esempio 2.3.1. I nodi $K_{\text{Id}}, K_{t_\beta}$ e K_{t_γ} sono nodi banali in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$.

Esempio 2.3.2. Il nodo K_{t_α} è il nodo banale in \mathbf{S}^3 .

Esempio 2.3.3. Se $\psi = t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\alpha$, allora K_ψ è il nodo $\mathbf{S}^1 \times \{Q\} \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, dove Q è un punto di \mathbf{S}^2 . Quindi, in questo caso, K_ψ è un generatore standard per il primo gruppo di omologia di $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$.

2.4 Rappresentazione standard

In questa sezione dimostreremo che ogni (1,1)-nodo $K \subset L(p, q)$ ammette una rappresentazione tramite la composizione di un elemento appartenente

a $\ker \Omega$ ed un elemento che dipende solamente da $L(p, q)$. Una rappresentazione di questo tipo sarà detta “standard”.

Innanzitutto, ci occuperemo dei nodi banali negli spazi lenticolari. Sia \mathcal{T} il sottogruppo di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ generato da t_α e t_β . È facile vedere che esiste un disco $D \subset \mathbb{H}$, con $A \cap \partial D = A$ e $\partial D - A \subset T$, per cui vale $D \cap \alpha = D \cap \beta = \emptyset$. Quindi ogni elemento di \mathcal{T} produce il nodo banale in uno spazio lenticolare. D'altra parte, ogni nodo banale in uno spazio lenticolare può essere rappresentato tramite un elemento di \mathcal{T} , come proveremo nella Proposizione 2.4.1.

Lemma 2.4.1. *Sia K un $(1, 1)$ -nodo in $L(p, q)$. Allora, per ogni $r, s \in \mathbb{Z}$ tali che $qr - ps = 1$ esiste $\psi \in \text{PMCG}_2(\mathbb{T})$, con $\Omega(\psi) = \begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix}$, tale che $K = K_\psi$.*

Dimostrazione. Sia $K = K_{\bar{\psi}}$, con $\Omega(\bar{\psi}) = \begin{pmatrix} q & \bar{s} \\ p & \bar{r} \end{pmatrix}$. Essendo $q\bar{r} - p\bar{s} = 1$, esiste $c \in \mathbb{Z}$ tale che $r = \bar{r} + cp$ ed $s = \bar{s} + cq$. Se $\psi = \bar{\psi}t_\beta^{-c}$, si ha $K_\psi = K_{\bar{\psi}}$, poiché t_β^{-c} può essere esteso ad un omeomorfismo della coppia (\mathbb{H}, A) . Inoltre $\Omega(\psi) = \Omega(\bar{\psi})\Omega(t_\beta^{-c}) = \begin{pmatrix} q & \bar{s} \\ p & \bar{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \bar{s} + cq \\ p & \bar{r} + cp \end{pmatrix}$, che completa la dimostrazione. \square

Dati gli interi p, q tali che $0 < p < q$ e $\gcd(p, q) = 1$, si consideri la successione di equazioni dell'algoritmo Euclideo (con $r_0 = p, r_1 = q$):

$$\begin{aligned} r_0 &= a_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{m-2} &= a_{m-1} r_{m-1} + r_m \\ r_{m-1} &= a_m r_m, \end{aligned}$$

con $r_1 > r_2 > \dots > r_{m-1} > r_m = 1$.

Gli a_i sono i coefficienti della frazione continua

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_m}}}.$$

D'ora in avanti useremo la notazione $p/q = [a_1, a_2, \dots, a_m]$.

Proposizione 2.4.1. (1) *Il nodo banale in \mathbf{S}^3 è rappresentato da $\psi_{1,0} = t_\beta t_\alpha t_\beta$.*

(2) *Il nodo banale in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ è rappresentato da $\psi_{0,1} = 1$.*

(3) *Siano p, q interi tali che $0 < q < p$ e $\gcd(p, q) = 1$. Se $p/q = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, allora il nodo banale nello spazio lenticolare $L(p, q)$ è rappresentato da*

$$\psi_{p,q} = \begin{cases} t_\alpha^{a_1} t_\beta^{-a_2} \dots t_\alpha^{a_m} & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ t_\alpha^{a_1} t_\beta^{-a_2} \dots t_\beta^{-a_m} t_\beta t_\alpha t_\beta & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Poiché tutti gli omeomorfismi coinvolti appartengono a \mathcal{T} , tutti i nodi sono banali. È facile verificare (vedi anche [7, §12.B]) che, per opportuni $r, s \in \mathbb{Z}$, si ha:

$$\begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_m & 1 \end{pmatrix} & \text{se } m \text{ è dispari,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & a_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{se } m \text{ è pari.} \end{cases}$$

Da $\Omega(t_\alpha^{a_i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_i & 1 \end{pmatrix}$, $\Omega(t_\beta^{a_i}) = \begin{pmatrix} 1 & -a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e $\Omega(t_\beta t_\alpha t_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, segue l'enunciato. \square

Ora siamo in grado di dimostrare il risultato annunciato all'inizio della sezione.

Teorema 2.4.1. *Sia K un (1,1)-nodo in $L(p, q)$, allora esistono $\psi', \psi'' \in \ker \Omega$ tali che $K = K_\psi$, con $\psi = \psi' \psi_{p,q} = \psi_{p,q} \psi''$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2.4.1, esiste ψ , con $\Omega(\psi) = \Omega(\psi_{p,q})$, tale che $K = K_\psi$. È sufficiente porre $\psi' = \psi \psi_{p,q}^{-1}$ e $\psi'' = \psi_{p,q}^{-1} \psi$. \square

Una rappresentazione $\psi \in \text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ di un (1,1)-nodo sarà detta *standard* se ψ ha la forma descritta nel teorema precedente.

Osservazione 2.4.1. Un (1,1)-nodo ammette differenti (in generale infinite) rappresentazioni standard. Per esempio τ_m^c rappresenta il nodo banale in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, per ogni $c \in \mathbb{Z}$.

2.5 Rappresentazione dei nodi torici

In questa sezione daremo una rappresentazione standard per tutti i nodi torici in \mathbf{S}^3 . Sia $K = \mathbf{t}(k, h)$ un nodo torico di tipo (k, h) . Allora $\gcd(k, h) = 1$ e possiamo assumere che K sia immerso nel bordo $\Gamma = \partial H$ di un corpo di manici di genere uno a sua volta immerso in modo standard in \mathbf{S}^3 (ossia come illustrato in Figura 2.6). Spingendo lievemente (la parte interna di) un arco $A' \subset K$ fuori da H e $K - A'$ dentro H , otteniamo banalmente una $(1, 1)$ -decomposizione per K (vedi Figura 2.6). Osserviamo che, per il Teorema 1.2.4, possiamo assumere $0 < |k| < h$.

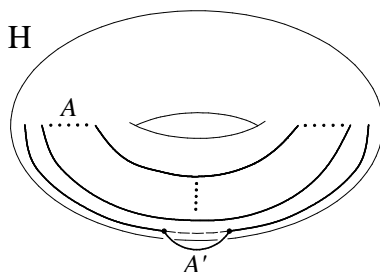


Figura 2.6: Una $(1, 1)$ -decomposizione di un nodo torico.

Nella proposizione seguente $[x]$ denota la parte intera di x .

Teorema 2.5.1. *Il nodo torico $\mathbf{t}(k, h) \subset \mathbf{S}^3$ è l' $(1, 1)$ -nodo K_ψ con:*

$$\psi = \prod_{i=1}^h (\tau_m^{\lfloor (i-1)k/h \rfloor - \lfloor ik/h \rfloor} \tau_l^{-1}) t_\beta t_\alpha t_\beta,$$

dove $\tau_m = t_\beta t_\alpha^{-1}$ e $\tau_l = \tau_m^{-1} t_\alpha \tau_m t_\alpha^{-1}$.

Dimostrazione. A meno di isotopia, possiamo supporre che l'arco $A = K_\psi - \text{int}(A')$ sia contenuto in ∂H , come disegnato in Figura 2.6. L'arco A può essere trasformato in un arco banale \tilde{A} tale che $\tilde{A} \cup A'$ è il nodo banale in \mathbf{S}^3 rappresentato dall'omeomorfismo standard $\psi_{1,0} = t_\beta t_\alpha t_\beta$, attraverso un'opportuna successione di omeomorfismi τ_l e τ_m , secondo il seguente

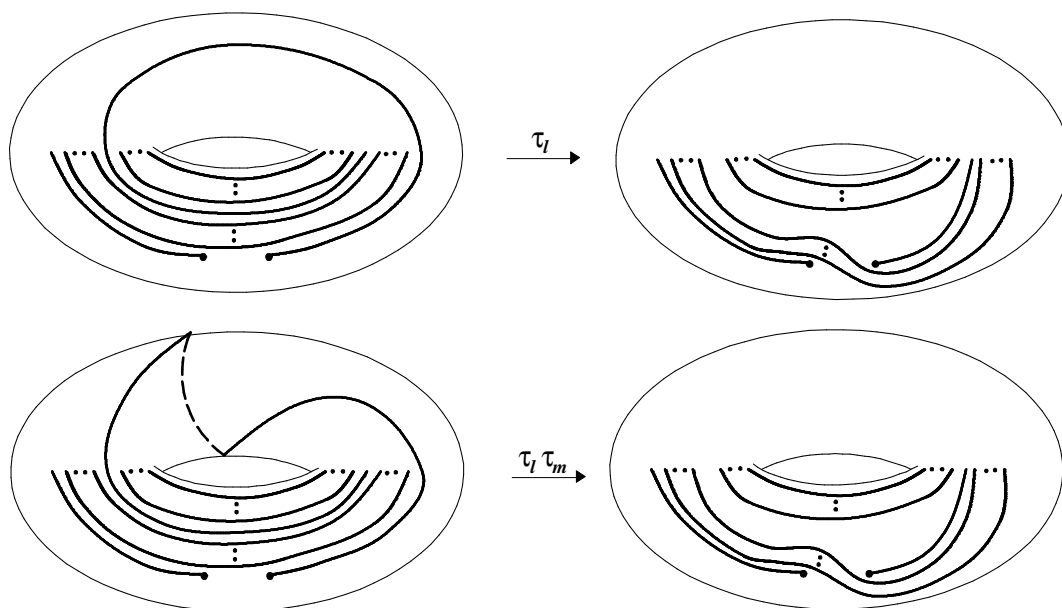


Figura 2.7: Effetto di τ_m e $\tau_l \tau_m$ sull'arco A .

algoritmo. Si consideri la successione di equazioni:

$$\begin{aligned} k &= q_1 h + r_1, \\ 2k &= q_2 h + r_2, \\ &\vdots \\ hk &= q_h h + r_h, \end{aligned}$$

dove $0 \leq r_i < h$, per $i = 1, \dots, h$. Inoltre, sia $q_0 = 0$. Allora $q_i = \lfloor ik/h \rfloor$, per $i = 0, 1, \dots, h$. Ora definiamo gli omeomorfismi $\psi_i = \tau_l \tau_m^{q_i - q_{i-1}}$, per $i = 1, \dots, h$. In Figura 2.7 è descritto l'effetto di τ_l e $\tau_l \tau_m$ su A . Come conseguenza, l'omeomorfismo $\phi = \psi_h \psi_{h-1} \cdots \psi_1$ trasforma l'arco A nell'arco \tilde{A} (in Figura 2.8 è mostrato il caso $\mathbf{t}(5, 7)$) e quindi si ha $\psi_{1,0} = \phi \psi$. perciò $\phi^{-1} \psi_{1,0}$ rappresenta il nodo torico $\mathbf{t}(k, h)$. \square

Esempio 2.5.1. Il nodo torico $\mathbf{t}(5, 7)$ è l'(1,1)-nodo K_ψ , con $\psi = \tau_l^{-1} (\tau_m^{-1} \tau_l^{-1})^2 \tau_l^{-1} (\tau_m^{-1} \tau_l^{-1})^3 t_\beta t_\alpha t_\beta$ (vedi Figura 2.8).

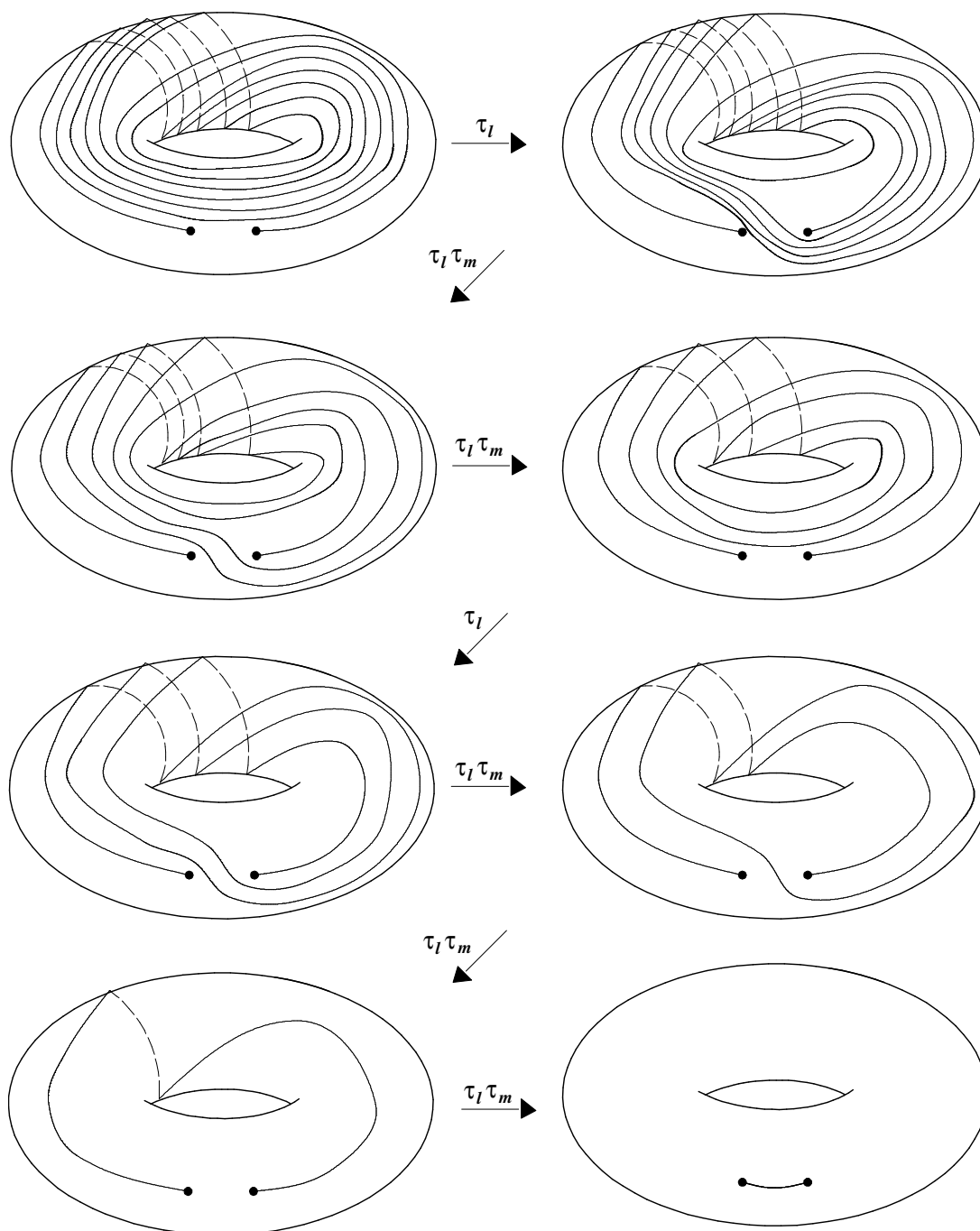


Figura 2.8: Banalizzazione di $t(5,7)$.

2.6 Rappresentazione dei nodi a due ponti

In questa sezione daremo una rappresentazione standard per tutti i nodi a due ponti in \mathbf{S}^3 . Sia $\mathbf{b}(l, t)$ un nodo a due ponti non banale in \mathbf{S}^3 . È facile verificare (vedi [26, Es. 2.1.14]) che, a meno di equivalenza forte, $\mathbf{b}(l, t)$ ammette una presentazione di Conway con un numero pari di parametri pari $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$.

Teorema 2.6.1. *Il nodo a due ponti $\mathbf{b}(l, t) \subset \mathbf{S}^3$ con parametri di Conway $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$ è $l'(1, 1)$ -nodo K_ψ con:*

$$\psi = t_\beta t_\alpha t_\beta \tau_m^{-b_n} t_\varepsilon^{a_n} \dots \tau_m^{-b_1} t_\varepsilon^{a_1},$$

dove $\tau_m = t_\beta t_\gamma^{-1}$ e $t_\varepsilon = \tau_l^{-1} \tau_m \tau_l \tau_m^{-1}$ è il Dehn twist lungo la curva ε illustrata in Figura 2.10.

Dimostrazione. In Figura 2.10 è mostrato il risultato dell'applicazione di $\tau_m^{-b_n} t_\varepsilon^{a_n} \dots \tau_m^{-b_1} t_\varepsilon^{a_1}$. Applicando $\psi_{1,0} = t_\beta t_\alpha t_\beta$ si ottiene il nodo a due ponti con parametri di Conway $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$.

Ora dimostriamo che si ha $t_\varepsilon = \tau_l^{-1} \tau_m \tau_l \tau_m^{-1}$ (si noti che nessun disco bordato da ε e propriamente immerso in H è disgiunto da A). Facendo riferimento alla Figura 2.9, vale la seguente relazione di tipo lanterna (vedi Sezione 1.4):

$$t_\gamma^2 t_{\delta_1} t_{\delta_2} = t_\varepsilon t_\beta t_\zeta.$$

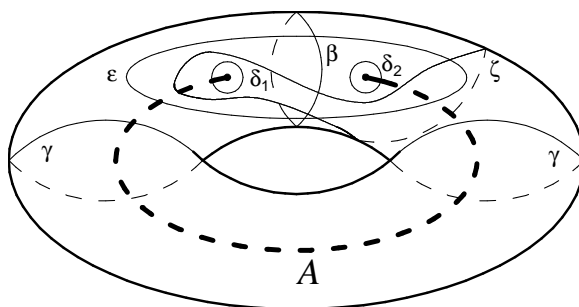


Figura 2.9: Una relazione di tipo lanterna.

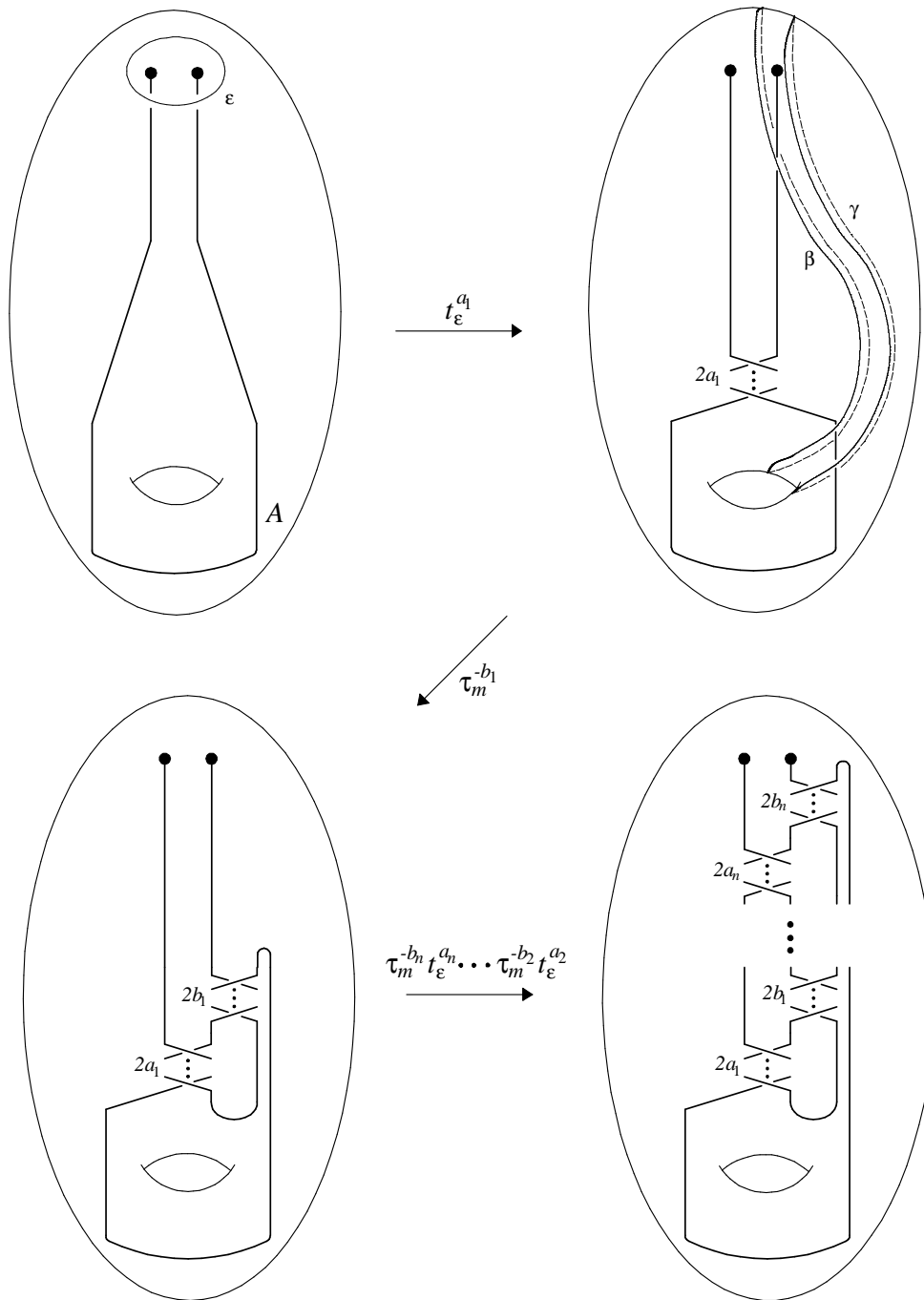


Figura 2.10: Rappresentazione standard del nodo a due ponti con parametri di Conway $[2a_1, 2b_1, \dots, 2a_n, 2b_n]$.

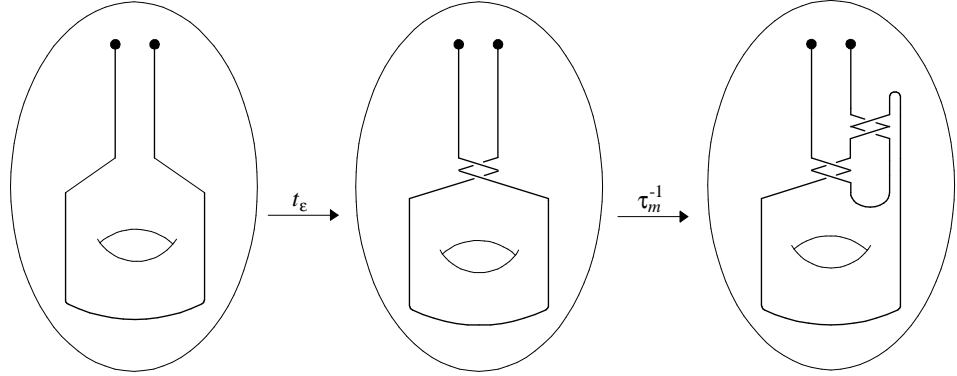


Figura 2.11: Rappresentazione standard del nodo a otto.

Otteniamo $\zeta = t_\alpha t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1}(\gamma)$ e quindi $t_\zeta = t_\alpha t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\gamma t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1}$. Poiché $t_{\delta_1} = t_{\delta_2} = 1$ si ha $t_\varepsilon = t_\gamma^2 t_\zeta^{-1} t_\beta^{-1} = t_\gamma^2 t_\alpha t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1}$. Ora, utilizzando le relazioni della presentazione (2.1) otteniamo

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon &= t_\gamma^2 t_\alpha t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = t_\gamma t_\alpha t_\gamma t_\alpha t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = \\
&= t_\gamma t_\alpha t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = t_\gamma t_\alpha t_\beta^{-1} t_\gamma t_\alpha^{-1} t_\gamma^{-1} t_\beta t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = \\
&= t_\gamma t_\alpha t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\beta t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\beta t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = \\
&= t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\alpha t_\beta t_\alpha t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta^{-1} = t_\gamma t_\beta^{-1} t_\alpha^{-1} t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha t_\alpha t_\beta t_\gamma^{-1} t_\alpha^{-1} t_\gamma t_\beta^{-1} = \\
&= \tau_m^{-1} t_\alpha^{-1} \tau_m t_\alpha t_\alpha \tau_m t_\alpha^{-1} \tau_m^{-1} = \tau_m^{-1} t_\alpha^{-1} \tau_m t_\alpha \tau_m \tau_m^{-1} t_\alpha \tau_m t_\alpha^{-1} \tau_m^{-1} = \\
&= t_\eta^{-1} t_\alpha \tau_m t_\eta t_\alpha^{-1} \tau_m^{-1} = \tau_l^{-1} \tau_m \tau_l \tau_m^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Esempio 2.6.1. Il nodo a otto $\mathbf{b}(5, 3)$, che ha parametri di Conway [2, 2], è il nodo K_ψ con $\psi = t_\beta t_\alpha t_\beta \tau_m^{-1} t_\varepsilon$ (vedi Figura 2.11).

Capitolo 3

Rivestimenti fortemente ciclici ramificati

In questo capitolo introdurremo il concetto di rivestimento fortemente ciclico ramificato di un $(1, 1)$ -nodo e ne daremo le condizioni di esistenza ed unicità. Inoltre, utilizzando la rappresentazione degli $(1, 1)$ -nodi definita nel capitolo precedente, otterremo un algoritmo che permette di calcolare una presentazione ciclica del gruppo fondamentale dello spazio di rivestimento. I risultati illustrati in questo capitolo sono contenuti anche in [8].

Richiamiamo, innanzitutto, alcuni concetti che ci serviranno nel resto del capitolo.

Una presentazione finita e bilanciata di un gruppo $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ è detta una *presentazione ciclica* se esiste una parola w nel gruppo libero F_n generato da x_1, \dots, x_n tale che i relatori della presentazione sono $r_k = \theta_n^{k-1}(w)$, per $k = 1, \dots, n$, dove $\theta_n : F_n \rightarrow F_n$ è l'automorfismo definito da $\theta_n(x_i) = x_{i+1}$, per $i = 1, \dots, n$ (indici mod n). Tale presentazione ciclica e il gruppo corrispondente verranno denotati con $G_n(w)$, quindi

$$G_n(w) = \langle x_1, \dots, x_n \mid w, \theta_n(w), \dots, \theta_n^{n-1}(w) \rangle.$$

Ovviamente $G_n(w) \cong G_n(\theta_n^s(w))$ per ogni intero s .

Il polinomio associato alla presentazione ciclica $G_n(w)$ è definito da

$$f_w(u) = \sum_{i=1}^n a_i u^{i-1},$$

dove a_i è la somma degli esponenti di x_i in w . Per maggiori dettagli si veda [25].

3.1 Definizioni e proprietà

In questa sezione definiremo un particolare tipo di rivestimento ciclico ramificato che, nel caso in cui l'insieme di ramificazione sia un $(1, 1)$ -nodo, permetterà di ottenere una presentazione ciclica per il gruppo fondamentale del rivestimento. Vedremo che l'introduzione di questa nozione generalizza il caso dei rivestimenti ciclici di \mathbf{S}^3 ramificati su un nodo.

Un rivestimento ciclico ad n -fogli di $L(p, q)$ ramificato su un $(1, 1)$ -nodo K sarà detto *fortemente ciclico* (e denotato con $C_n(K)$) se è n l'indice di ramificazione lungo il nodo¹ K . Questo significa che la fibra $f^{-1}(x)$ di ogni punto $x \in K$ contiene un unico punto (vedi Osservazione 1.3.1). In tal caso, se denotiamo con $\omega_f : H_1(L(p, q) - K) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ la monodromia di f , si ha che l'immagine attraverso ω_f della classe di omologia di un meridiano di K è un generatore di \mathbb{Z}_n (a meno di equivalenza si può sempre supporre che tale immagine sia uno).

Osservazione 3.1.1. Per un $(1, 1)$ -nodo in \mathbf{S}^3 ogni rivestimento ciclico ramificato ad n -fogli è anche fortemente ciclico. Infatti $H_1(\mathbf{S}^3 - K)$ è il gruppo ciclico infinito generato dalla classe di omologia di un meridiano di K (vedi Proposizione 1.2.2) e quindi l'immagine di tale classe attraverso ω_f è un generatore di \mathbb{Z}_n , che può essere scelto uguale a uno, a meno di equivalenza. In altre parole, per gli $(1, 1)$ -nodi in \mathbf{S}^3 le nozioni di rivestimento ciclico e fortemente ciclico coincidono.

Quindi, in particolare, un rivestimento (fortemente) ciclico ramificato ad n -fogli di un $(1, 1)$ -nodo K in \mathbf{S}^3 esiste ed è unico (a meno di equivalenza).

¹Più precisamente, se è n l'indice di ramificazione di tutti i punti appartenenti alla controimmagine di K (ossia tutti i punti pseudo-singolari).

Ovviamente questo non vale quando lo spazio ambiente non è \mathbf{S}^3 . Per un $(1, 1)$ -nodo $K \subset L(p, q)$ il primo gruppo di omologia di $L(p, q) - K$ ha la struttura descritta nel Corollario 2.3.1. Di conseguenza, un rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di un $(1, 1)$ -nodo non contenuto in \mathbf{S}^3 può non esistere e, quando esiste, può non essere unico. Si hanno infatti le seguenti condizioni di esistenza ed unicità.

Teorema 3.1.1. *Sia K_ψ un $(1, 1)$ -nodo in $L(p, q)$. Allora esiste un rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli ramificato di K_ψ se e solo se d divide q'' , dove $d = \gcd(p, n)$ e q'' è unicamente determinato dalla relazione omologica $\psi(\beta) = p\alpha + q'\beta + q''\gamma$. In tal caso esistono esattamente d rivestimenti di questo tipo, a meno di equivalenza.*

Dimostrazione. Dato che γ è omologo ad un meridiano di K , per definizione, l'esistenza di un rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli f di K_ψ significa che vale $\omega_f(\gamma) = 1$, a meno di equivalenza.

Dal Corollario 2.3.1 si ha:

$$H_1(L(p, q) - K_\psi) = \langle \alpha, \gamma \mid p\alpha + q''\gamma \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\gcd(p, q'')},$$

dove q'' è unicamente determinato dalla relazione omologica $\psi(\beta) = p\alpha + q'\beta + q''\gamma$. Quindi il rivestimento esiste se e solo se $\omega_f(p\alpha + q''\gamma) \equiv 0 \pmod n$ o, in altre parole, se esiste un elemento $x \in \mathbb{Z}_n$ tale che $px + q'' \equiv 0 \pmod n$. Questa equazione è risolvibile se e solo se d divide q'' , dove $d = \gcd(p, n)$, e in tal caso ha esattamente d soluzioni. Poiché due soluzioni differenti danno luogo a rivestimenti non equivalenti, l'enunciato risulta dimostrato. \square

Osservazione 3.1.2. In particolare, per gli $(1, 1)$ -nodi in \mathbf{S}^3 si ha $p = \pm 1$, da cui seguono immediatamente l'esistenza e l'unicità di un rivestimento ciclico ramificato ad n -fogli.

Esempio 3.1.1. Sia $\psi = t_\alpha^2 t_\gamma t_\alpha^{-4}$, allora K_ψ è un $(1, 1)$ -nodo in $L(6, 5)$. Applicando le formule riportate nella Tabella 2.2, si ottiene $\psi(\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}^2 \bar{\gamma} \bar{\alpha}^{-1})^4 \bar{\alpha}^2 \bar{\beta}$. Quindi si ha:

$$H_1(L(6, 5) - K_\psi) = \langle \alpha, \gamma \mid 6\alpha + 4\gamma \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

In questo caso non esiste nessun rivestimento ramificato fortemente ciclico a 6-fogli di K_ψ . Esistono, contrariamente, rivestimenti ramificati ciclici a 6-fogli di K_ψ . Per esempio, si può scegliere $\omega_f(\alpha) = 1$ e $\omega_f(\gamma) = 3$. Tale rivestimento non è ovviamente fortemente ciclico in quanto l'indice di ramificazione lungo K è due.

Esempio 3.1.2. Sia $\psi = t_\alpha^{-2} t_\gamma^{-2} t_\alpha^{-2}$, allora K_ψ è un $(1, 1)$ -nodo in $L(4, 1)$. Si ottiene $\psi(\bar{\beta}) = ((\bar{\gamma}^{-1} \bar{\alpha}^2)^2 \bar{\alpha}^{-1})^2 \bar{\alpha}^{-2} \bar{\beta}$ e quindi si ha:

$$H_1(L(4, 1) - K_\psi) = \langle \alpha, \gamma \mid 4\alpha - 4\gamma \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4.$$

In questo caso esistono esattamente quattro rivestimenti ramificati fortemente ciclici a 4-fogli di K_ψ non equivalenti, che dipendono dalla scelta di $\omega_f(\alpha) \in \mathbb{Z}_4$.

Come vedremo nell'Osservazione 3.2.2, due rivestimenti ramificati fortemente ciclici ad n -fogli di uno stesso $(1, 1)$ -nodo non equivalenti possono essere effettivamente non omeomorfi.

Osservazione 3.1.3. Anche per un $(1, 1)$ -nodo K non in \mathbf{S}^3 esistono molti casi in cui il rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di K esiste ed è unico. Per esempio, dato $K \subset L(p, q)$, per ogni n primo con p esiste un unico rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di K .

3.2 Connessioni con le presentazioni cicliche di gruppi

In questa sezione studieremo i legami tra i rivestimenti fortemente ciclici ramificati degli $(1, 1)$ -nodi e le presentazioni cicliche del gruppo fondamentale del rivestimento.

Teorema 3.2.1. [42] *Ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato a n -fogli di un $(1, 1)$ -nodo ammette una presentazione ciclica per il gruppo fondamentale indotta da una decomposizione di Heegaard di genere n .*

Dimostrazione. Sia $f : (M, f^{-1}(K)) \rightarrow (L(p, q), K) = (H, A) \cup_\varphi (H', A')$ un rivestimento fortemente ciclico a n -fogli dell' $(1, 1)$ -nodo K . Allora $H_n = f^{-1}(H)$ e $H'_n = f^{-1}(H')$ sono entrambi corpi di manici di genere n . Inoltre, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(A')$ sono entrambi archi banali propriamente immersi in, rispettivamente, H_n e H'_n . Otteniamo in questo modo una decomposizione di Heegaard di genere n $(M, f^{-1}(K)) = (H_n, f^{-1}(A)) \cup_F (H'_n, f^{-1}(A'))$, dove $F : \partial H'_n \rightarrow \partial H_n$ è il sollevamento di φ rispetto a f . Sia $u \subset H - A$ un meridiano di A e sia $\bar{x} \subset H - A$ un generatore $\pi_1(H, *)$ tale che $\omega_f(\bar{x}) = 0$, dove il punto base $*$ è un qualsiasi punto su u . Esiste: si prenda un generatore $\chi \subset H - A$ di $\pi_1(H, *)$. Se $\omega_f(\chi) = k$ allora basta scegliere \bar{x} omotopo a χu^{-k} .

Inoltre fissato un punto $Q \in A$, sia ξ un arco da $*$ a Q tale che $\xi \cap A = Q$. Allora $f^{-1}(Q)$ è un unico punto $\tilde{Q} \in f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(*)$ contiene n punti $\tilde{*}_1, \dots, \tilde{*}_n$. Per $i = 1, \dots, n$, siano \tilde{x}_i e $\tilde{\xi}_i$ i sollevamenti (rispetto ad f) di, rispettivamente, \bar{x} e ξ , contenenti $\tilde{*}_i$. Allora gli n cappi $x_1 = \tilde{\xi}_1^{-1} \tilde{x}_1 \tilde{\xi}_1, \dots, x_n = \tilde{\xi}_n^{-1} \tilde{x}_n \tilde{\xi}_n$ generano $\pi_1(H_n, \tilde{Q})$ e sono permutati ciclicamente da un generatore Ψ del gruppo delle trasformazioni di rivestimento. Sia \mathbf{D}' un disco meridiano per il toro solido H' tale che $\mathbf{D}' \cap A' = \emptyset$, allora $f^{-1}(\mathbf{D}')$ è un sistema di dischi meridiani $\{\tilde{\mathbf{D}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{D}}'_n\}$ per il corpo di manici H'_n , e questi sono permutati ciclicamente da Ψ . Le curve $F(\partial\tilde{\mathbf{D}}'_1), \dots, F(\partial\tilde{\mathbf{D}}'_n)$ danno i relatori per la presentazione di $\pi_1(M, \tilde{Q})$ indotta dalla decomposizione di Heegaard. Dato che Ψ permuta ciclicamente sia le curve le cui classi di omotopia danno i generatori sia quelle le cui classi di omotopia danno i relatori, l'enunciato risulta dimostrato. \square

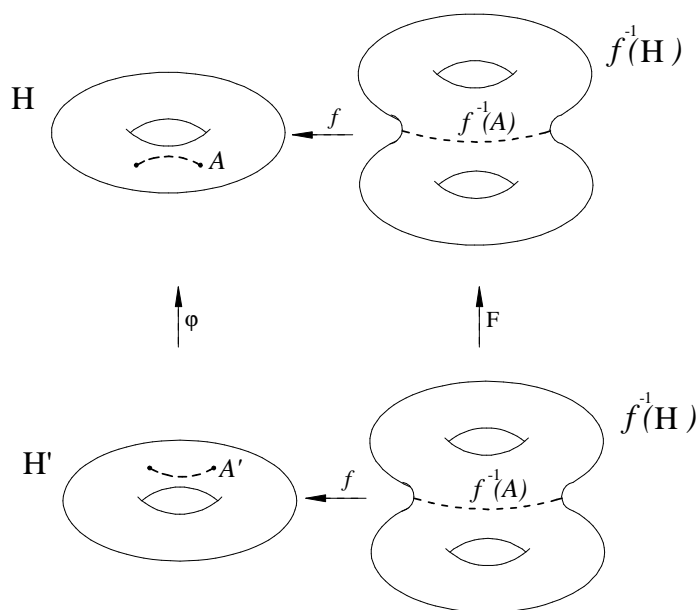


Figura 3.1: Sollevamento di una $(1,1)$ -decomposizione.

Osservazione 3.2.1. Poichè, come abbiamo già visto, i nodi a due ponti ed i nodi torici sono $(1,1)$ -nodi, si ottiene che ogni rivestimento fortemente ciclico

ramificato ad n -fogli di un nodo a due ponti o di un nodo torico ammette una presentazione ciclica per il gruppo fondamentale.

Sia K un $(1, 1)$ -nodo in $L(p, q)$ e sia ψ un elemento di $\text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ tale che $K = K_\psi$. Allora $\pi_1(L(p, q) - K_\psi, *) = \langle \bar{\alpha}, \bar{\gamma} \mid r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \rangle$, come dimostrato nella Proposizione 2.3.1. Ora, sia ω_f la monodromia di un rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di K . Seguendo la dimostrazione del Teorema 3.2.1, scegliamo un nuovo generatore $\bar{x} = \bar{\alpha}\bar{\gamma}^{-\omega_f(\alpha)}$ e otteniamo $\pi_1(L(p, q) - K, *) = \langle \bar{x}, \bar{\gamma} \mid \bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) \rangle$, con $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) = r(\bar{x}\bar{\gamma}^{\omega_f(\alpha)}, \bar{\gamma})$. Si ha $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) = \bar{x}^{\varepsilon_1}\bar{\gamma}^{\delta_1} \cdots \bar{x}^{\varepsilon_s}\bar{\gamma}^{\delta_s}$ per qualche $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, \delta_1, \dots, \delta_s \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.2.2. *In accordo con le notazioni sopra definite, sia $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) = \bar{x}^{\varepsilon_1}\bar{\gamma}^{\delta_1} \cdots \bar{x}^{\varepsilon_s}\bar{\gamma}^{\delta_s}$. Allora il gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di K , con monodromia ω_f , ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$, con:*

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

(*indici mod n*), dove $i_k \equiv 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \pmod{n}$, per $k = 1, \dots, s$.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del Teorema 3.2.1, il gruppo fondamentale di $C_n(K)$ ha generatori corrispondenti alle componenti $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ del sollevamento di \bar{x} . I relatori sono (omotopi a) $F(\partial\tilde{\mathbf{D}}'_1), \dots, F(\partial\tilde{\mathbf{D}}'_n)$, dove F è il sollevamento di φ rispetto a f e ogni $\partial\tilde{\mathbf{D}}'_i$ è una componente del sollevamento di un disco meridiano \mathbf{D}' di H' tale che $\mathbf{D}' \cap A' = \emptyset$. Quindi possiamo scegliere \mathbf{D}' tale che $\partial\mathbf{D}' = \mu(\beta)$ e quindi i relatori sono (omotopi a) le componenti del sollevamento di $r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = i\psi(\bar{\beta})$, o equivalentemente $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma})$. Ora, essendo $\omega_f(\gamma) = 1$, a meno di equivalenza, un fattore $\bar{\gamma}^k$ si solleva ad un arco che connette il punto di $f^{-1}(*)$ nell' i -esimo foglio con il punto corrispondente nel foglio $i + k \pmod{n}$. Da questo segue immediatamente l'enunciato. \square

Riassumiamo l'algoritmo che permette di trovare la parola w che determina la presentazione ciclica del gruppo fondamentale di un rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli f di K una volta assegnato un elemento $\psi \in \text{PMCG}_2(\mathbb{T})$ che rappresenta K , cioè tale che $K = K_\psi$:

- si usino le formule della Tabella (2.2) per calcolare la classe di omotopia di $\psi(\bar{\beta})$;
- si trovi $r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = i\psi(\bar{\beta})$ eliminando tutti i termini $\bar{\beta}$ da $\psi(\bar{\beta})$;

- si calcoli $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma})$ sostituendo $\bar{x}\bar{\gamma}^{\omega_f(\alpha)}$ al posto di $\bar{\alpha}$;
- si ottenga w applicando il Teorema 3.2.2.

Nel seguente esempio calcoliamo, applicando il Teorema 3.2.2, la parola che determina la presentazione ciclica del rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli sui nodi a due ponti di genere uno. Lo stesso risultato è stato precedentemente ottenuto, utilizzando un metodo differente, in [53] e generalizzato a tutti i nodi a due ponti in [43].

Esempio 3.2.1. Il gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli del nodo a due ponti di genere uno, con parametri di Conway $[2a_1, 2b_1]$, ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$, dove:

$$w = (x_1^{-b_1} x_2^{b_1})^{a_1} x_2 (x_3^{-b_1} x_2^{b_1})^{a_1}.$$

Nei prossimi corollari diamo un nuovo risultato per due classi di nodi torici: i nodi torici di tipo $\mathbf{t}(k, ck \pm 1)$ e quelli di tipo $\mathbf{t}(k, ck + 2)$.

Corollario 3.2.1. *Il gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli ramificato del nodo torico $\mathbf{t}(k, ck + 1)$, con $c, k > 0$, ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$, dove:*

$$w = \prod_{j=0}^{c(k-1)} x_{1+jk} \prod_{i=0}^{k-2} \prod_{l=1}^c x_{k(c(k-1)+1)-i(ck+1)-lk}^{-1}$$

(indici mod n).

Il gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli del nodo torico $\mathbf{t}(k, ck - 1)$, con $c, k > 1$, ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$, dove:

$$w = \prod_{i=0}^{k-2} \prod_{l=0}^{c-1} x_{1+i(ck-1)+lk}^{-1} \prod_{j=0}^{c(k-1)-2} x_{k(c(k-2)-2)+2-jk}$$

(indici mod n).

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $\mathbf{t}(k, ck + 1)$. Dal Teorema 2.5.1 si ha $\mathbf{t}(k, ck + 1) = K_\psi$ con $\psi = (\tau_l^{-c} \tau_m^{-1})^k \tau_l^{-1} t_\beta t_\alpha t_\beta$. Applicando la Proposizione 2.3.1 e usando le formule riportate nella Tabella (2.2), si ottiene $\pi_1(\mathbf{S}^3 - \mathbf{t}(k, ck + 1)) = \langle \bar{\alpha}, \bar{\gamma} \mid r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \rangle$, con $r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \bar{\gamma}^{-1} \bar{\alpha}^{c(k-1)+1} (\bar{\gamma}^{-1} \bar{\alpha}^{-c})^{k-1}$.

Allora $H_1(\mathbf{S}^3 - \mathbf{t}(k, ck + 1)) = \langle \alpha, \gamma \mid \alpha - k\gamma \rangle$. Poiché $\omega_f(\gamma) = 1$, si ha $\omega_f(\alpha) = k$ e $\bar{\alpha} = \bar{x}\bar{\gamma}^k$. Si ottiene $\pi_1(\mathbf{S}^3 - \mathbf{t}(k, ck + 1)) = \langle \bar{x}, \bar{\gamma} \mid \bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) \rangle$, con $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) = \bar{\gamma}^{-1} (\bar{x}\bar{\gamma}^k)^{c(k-1)+1} (\bar{\gamma}^{-1} (\bar{\gamma}^{-k} \bar{x}^{-1})^c)^{k-1}$. L'enunciato segue dall'applicazione del Teorema 3.2.2.

Il caso $\mathbf{t}(k, ck - 1)$ si ottiene in maniera del tutto analoga. \square

Il corollario precedente chiarisce le presentazioni ottenute in [11, Main Th.]. Una presentazione equivalente è stata ottenuta in [8] utilizzando una presentazione di $\mathbf{t}(k, ck \pm 1)$ non standard.

Corollario 3.2.2. *Il gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli del nodo torico $\mathbf{t}(k, ck + 2)$ con $k > 1$ dispari e $c > 0$, ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$, dove w è uguale a:*

$$\prod_{i=0}^{(k-3)/2} \left(\prod_{j=0}^{c(k-1)/2} x_{1-i(ck+2)+jk} \prod_{l=0}^{c(k+1)/2} x_{ck(k-1)/2-i(ck+2)-lk}^{-1} \right) \prod_{m=0}^{c(k-1)/2} x_{1-(k-1)(ck+2)/2+mk}$$

(indici mod n).

Dimostrazione. Poniamo $r = (k - 1)/2$. Dal Teorema 2.5.1 si ha che $\mathbf{t}(k, ck + 2) = K_\psi$ con $\psi = (\tau_l^{-c} \tau_m^{-1})^r \tau_l^{-1} (\tau_l^{-c} \tau_m^{-1})^{r+1} \tau_l^{-1} t_\beta t_\alpha t_\beta$. Applicando la Proposizione 2.3.1 e usando le formule riportate nella Tabella (2.2), si ottiene $\pi_1(\mathbf{S}^3 - \mathbf{t}(k, ck + 2)) = \langle \bar{\alpha}, \bar{\gamma} \mid r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \rangle$, con $r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}^{-1} \bar{\alpha}^{cr+1} \bar{\gamma}^{-1} \bar{\alpha}^{-c(r+1)-1})^r \bar{\gamma}^{-1} \bar{\alpha}^{cr+1}$.

Allora $H_1(\mathbf{S}^3 - \mathbf{t}(k, ck + 2)) = \langle \alpha, \gamma \mid \alpha - k\gamma \rangle$. Poiché $\omega_f(\gamma) = 1$, si ha $\omega_f(\alpha) = k$ e $\bar{\alpha} = \bar{x}\bar{\gamma}^k$. Si ottiene $\pi_1(\mathbf{S}^3 - \mathbf{t}(k, ck + 2)) = \langle \bar{x}, \bar{\gamma} \mid \bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) \rangle$, con $\bar{r}(\bar{x}, \bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}^{-1} (\bar{x}\bar{\gamma}^k)^{1+c(k-1)/2} \bar{\gamma}^{-1} (\bar{\gamma}^{-k} \bar{x}^{-1})^{1+c(k+1)/2})^{(k-1)/2} \bar{\gamma}^{-1} (\bar{x}\bar{\gamma}^k)^{1+c(k-1)/2}$. L'enunciato segue dall'applicazione del Teorema 3.2.2. \square

Per esempio il gruppo fondamentale del rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di $\mathbf{t}(5, 7)$ ammette la presentazione ciclica $G_n(w)$ dove

$$w = x_{15} x_{20} x_{25} x_{24}^{-1} x_{19}^{-1} x_{14}^{-1} x_9^{-1} x_8 x_{13} x_{18} x_{17}^{-1} x_{12}^{-1} x_7^{-1} x_2^{-1} x_1 x_6 x_{11}.$$

Osservazione 3.2.2. Usando l'algoritmo descritto sopra è facile dimostrare che rivestimenti fortemente ciclici ramificati ad n -fogli di uno stesso $(1, 1)$ -nodo non equivalenti possono essere effettivamente non omeomorfi. Per esempio, i gruppo fondamentali dei quattro rivestimenti fortemente ciclici a 4-fogli non equivalenti dell'Esempio 3.1.2 ammettono le presentazioni cicliche $G_4(w_i)$, con $i = 0, 1, 2, 3$ definite da

$$\begin{aligned} w_0 &= x_4^2 x_3 x_2^2 x_1^{-1}, & w_1 &= x_4 x_1^3 x_2 x_1^{-1}, \\ w_2 &= x_4 x_2 x_3 x_4 x_2 x_1^{-1}, & w_3 &= x_4 x_3 x_1 x_3 x_2 x_1^{-1} \end{aligned}$$

per $\omega_f(\alpha) = 0, 1, 2, 3$ rispettivamente. Si ha:

$$H_1(C_4(K_\psi)) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 & \text{se } \omega_f(\alpha) = 1, 3, \\ \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 & \text{se } \omega_f(\alpha) = 0, 2. \end{cases}$$

Quindi almeno due di questi rivestimenti sono non omeomorfi.

C'è un forte legame tra il polinomio di Alexander di un $(1, 1)$ -nodo K in \mathbf{S}^3 e il polinomio associato alla presentazione ciclica del gruppo fondamentale di $C_n(K)$, costruita nella maniera descritta nel Teorema 3.2.2.

Proposizione 3.2.1. *Sia $K \subset \mathbf{S}^3$ un $(1, 1)$ -nodo. Se $\Delta_K(u)$ è il polinomio di Alexander di K e $f_w(u)$ è il polinomio associato alla presentazione ciclica del rivestimento fortemente ciclico ramificato di K , ottenuta applicando il Teorema 3.2.2, si ha $\Delta_K(u) = f_w(u)$, a meno di unità di $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$, quando $n > \deg \Delta_K(u)$.*

Dimostrazione. In [36, Th. 11] e [36, Remark 3] si dimostra l'enunciato nel caso dei nodi a due ponti in \mathbf{S}^3 . Ma in [36, Remark 4] si osserva che tale risultato si può estendere ad ogni nodo $K \subset \mathbf{S}^3$ il cui gruppo fondamentale ammette una presentazione con due generatori ed un relatore tale che uno dei due generatori generi anche il gruppo delle trasformazioni del rivestimento universale abeliano di K (vedi pag. 21). La Proposizione 2.3.1 assicura che tale condizione vale per ogni $(1, 1)$ -nodo in \mathbf{S}^3 . \square

Capitolo 4

Varietà di Dunwoody ed (1,1)-nodi

In questo capitolo ci occuperemo di stabilire la relazione esistente tra i rivestimenti fortemente ciclici ramificati di $(1, 1)$ -nodi e una classe di varietà dette varietà di Dunwoody, introdotte in [15] tramite diagrammi di Heegaard dotati di una particolare simmetria ciclica. Più precisamente dimostreremo che ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di un $(1, 1)$ -nodo è una varietà di Dunwoody. Questo teorema, insieme con il [20, Th. 6], che dimostra il viceversa, prova che la classe dei rivestimenti fortemente ciclici ramificati degli $(1, 1)$ -nodi coincide con quella delle varietà di Dunwoody. Inoltre descriveremo un algoritmo che, data una rappresentazione standard di un nodo torico, permette di calcolare i parametri della varietà di Dunwoody che ne è rivestimento (fortemente) ciclico ramificato ad n -fogli.

4.1 Varietà di Dunwoody

In questa sezione descriviamo la costruzione delle varietà di Dunwoody data in [15] e ne richiamiamo alcune proprietà.

Siano a, b, c, n interi tali che $n > 0$, $a, b, c \geq 0$ ed $a + b + c > 0$. Sia $\Gamma = \Gamma(a, b, c, n)$ il grafo piano, regolare e trivalente disegnato in Figura 4.1.

Esso, contiene n circonferenze superiori C'_1, \dots, C'_n ed n circonferenze inferiori C''_1, \dots, C''_n ognuna delle quali possiede $d = 2a + b + c$ vertici. In quanto

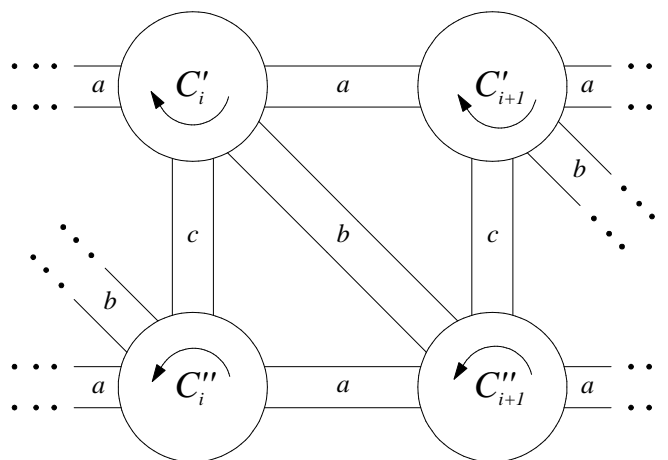


Figura 4.1: Il grafo $\Gamma(a, b, c, n)$.

segue considereremo gli indici delle circonferenze C'_i e $C''_i \pmod n$. Per ogni $i = 1, \dots, n$, ci sono a archi paralleli che connettono la circonferenza C'_i (risp. C''_i) alla circonferenza C'_{i+1} (risp. C''_{i+1}), b archi paralleli che connettono la circonferenza C'_i alla circonferenza C''_{i+1} e c archi paralleli che connettono la circonferenza C'_i alla circonferenza C''_i . Sia \mathcal{E}' l'insieme di questi archi e poniamo $\mathcal{C}' = \{C'_1, \dots, C'_n\}$ e $\mathcal{C}'' = \{C''_1, \dots, C''_n\}$.

La compattificazione uno-punto del piano, porta ad un'immersione di Γ in \mathbf{S}^2 . È evidente che il grafo è invariante rispetto ad una rotazione ϱ_n della sfera di $2\pi/n$ radianti rispetto ad un asse passante per il centro della sfera che non interseca Γ . Ovviamente ϱ_n manda C'_i in C'_{i+1} e C''_i in C''_{i+1} , per ogni $i = 1, \dots, n$.

Siano r ed s due interi fissati. Diamo ora un'orientazione in senso orario (risp. antiorario) alle circonferenze di \mathcal{C}' (risp. \mathcal{C}'') e numeriamo i loro vertici da 1 a d come illustrato in Figura 4.2 (la numerazione dei vertici va considerata $\pmod d$).

Se, per $i = 1, \dots, n$, rimuoviamo dalla sfera la parte interna dei $2n$ dischi bordati in \mathbf{S}^2 dalle circonferenze C'_i e C''_i che non contengono al loro interno nessun arco di Γ , ed incolliamo la circonferenza C'_i con la circonferenza C''_{i-s} in modo tale che siano identificati i vertici con la stessa numerazione, otteniamo un grafo quadrivalente regolare su una superficie orientabile T_n di genere n . Si noti che, per costruzione, risulta evidente che si possa fissare $r \pmod d$ ed $s \pmod n$.

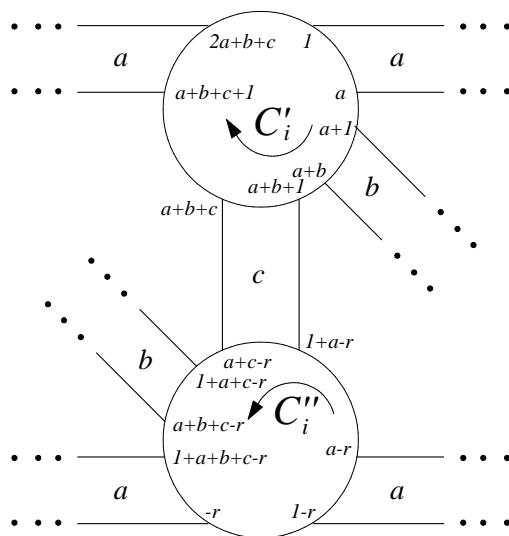


Figura 4.2: Numerazione dei vertici di $\Gamma(a, b, c, n)$.

Attraverso l'identificazione, gli nd archi appartenenti ad \mathcal{E}' vengono connessi tramite gli estremi e formano m curve chiuse e_1, \dots, e_m su T_n . Per $i = 1, \dots, n$, poniamo $c_i = C'_i = C''_{i-s}$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ ed $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Ovviamente tagliando lungo le curve appartenenti a \mathcal{C} , la superficie T_n non si disconnette. Se $m = n$ ed anche tagliando lungo le curve di \mathcal{E} la superficie T_n non si disconnette, allora, per la Proposizione 1.1.1, i sistemi di curve \mathcal{C} ed \mathcal{E} formano un diagramma di Heegaard di genere n di una 3-varietà che è pertanto completamente determinata dalla sestupla (a, b, c, n, r, s) . Ogni 3-varietà costruita in tale maniera è chiamata *varietà di Dunwoody*.

Inoltre, per ogni $n, s \in \mathbb{Z}$ con $n > 0$, associamo ad una sestupla del tipo $(0, 0, 0, n, 0, s)$, che chiameremo *sestupla banale*, il diagramma di Heegaard banale illustrato in Figura 4.3. È facile vedere che, per ogni $s \in \mathbb{Z}$, la varietà di Dunwoody determinata dal diagramma di Heegaard associato alla sestupla $(0, 0, 0, n, 0, s)$ è la somma connessa di n copie di $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$.

Denotiamo con \mathcal{S} l'insieme delle sestuple $(a, b, c, n, r, s) \in \mathbb{Z}^6$ tali che $n > 0$ e $a, b, c \geq 0$ e definiamo *ammissibili* le sestuple di \mathcal{S} che determinano dei diagrammi di Heegaard, cioè tali che:

- (1) l'insieme \mathcal{E} contiene esattamente n curve chiuse;
- (2) la superficie T_n non si disconnette se viene tagliata lungo le curve di \mathcal{E} .

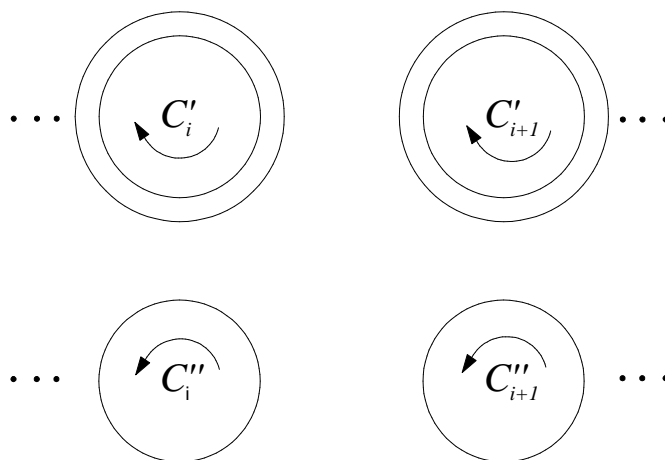


Figura 4.3: Il diagramma di Heegaard associato alla sestupla banale $(0, 0, 0, n, 0, s)$.

Il diagramma di Heegaard aperto e la varietà di Dunwoody associati alla sestupla ammissibile σ saranno denotati con $H(\sigma)$ ed $M(\sigma)$, rispettivamente.

Osservazione 4.1.1. Come osservato in [20], è facile vedere che non tutte le sestuple di \mathcal{S} sono ammissibili. Per esempio, le sestuple $(a, 0, a, 1, a, 0)$, con $a \geq 1$, danno luogo ad esattamente a curve in \mathcal{E} ; quindi non sono ammissibili se $a > 1$. Invece le sestuple $(1, 0, c, 1, 2, 0)$ non sono ammissibili se c è pari, perchè, in tal caso, \mathcal{E} contiene un'unica curva, ma tagliando lungo essa il toro T viene disconnesso.

Proposizione 4.1.1. [20] *Sia $\sigma = (a, b, c, n, r, s)$ una sestupla ammissibile. Allora ϱ_n induce una permutazione ciclica sulle curve di \mathcal{C} e di \mathcal{E} . Quindi se c è una curva di \mathcal{C} ed e è una curva di \mathcal{E} si ha $\mathcal{C} = \{\varrho_n^{k-1}(c) \mid k = 1, \dots, n\}$ ed $\mathcal{E} = \{\varrho_n^{k-1}(e) \mid k = 1, \dots, n\}$.*

Da questo lemma risulta evidente che per ogni sestupla ammissibile σ la presentazione del gruppo fondamentale della varietà di Dunwoody $M(\sigma)$ indotta dal diagramma di Heegaard $H(\sigma)$ è ciclica.

Data una sestupla ammissibile non banale σ , fissiamo un'orientazione standard per $H(\sigma)$ nel modo seguente: sia v il vertice su c_1 con il numero 1 e

sia v' il corrispondente vertice su C'_1 . Si orienti l'arco uscente da v' in modo tale che v' sia il punto iniziale e si orienti la curva $e_1 \in \mathcal{E}$ che contiene v in modo concorde all'orientazione fissata su tale arco. Ora sia $e_k = \varrho_n^{k-1}(e_1)$ per ogni $k = 1, \dots, n$. L'orientazione di e_1 induce, attraverso ϱ_n , un'orientazione anche su queste curve che a loro volta inducono un'orientazione sugli archi \mathcal{E}' di $H(\sigma)$. Inoltre, come già detto sopra, orientiamo le circonferenze C'_i (risp. C''_i) in senso orario (risp. antiorario), per $i = 1, \dots, n$. Chiameremo tale orientazione di $H(\sigma)$ *orientazione standard*¹.

Data una sestupla ammissibile non banale $\sigma = (a, b, c, n, r, s)$ e fissata su $H(\sigma)$ l'orientazione standard, sia Δ l'insieme degli archi di $H(\sigma)$ che compongono e_1 . Denotiamo con p_σ il numero degli archi di Δ orientati da una circonferenza di \mathcal{C}' ad una circonferenza di \mathcal{C}'' meno il numero di archi di Δ orientati da una circonferenza di \mathcal{C}'' ad una circonferenza di \mathcal{C}' e con q_σ il numero degli archi di Δ orientati da una circonferenza C'_i o C''_i ad una circonferenza C'_{i+1} o C''_{i+1} meno il numero degli archi di Δ orientati da una circonferenza C'_{i+1} o C''_{i+1} ad una circonferenza C'_i o C''_i . Inoltre poniamo $p_\sigma = q_\sigma = 0$ se σ è una sestupla banale.

Si noti che p_σ ha la stessa parità di $b+c$ mentre q_σ ha la stessa parità di $2a+b$ e quindi di b . È evidente che p_σ e q_σ dipendono solo dagli interi a, b, c, r .

Si ha il seguente risultato.

Teorema 4.1.1. [20] *Sia $\sigma = (a, b, c, n, r, s)$ una sestupla ammissibile. La varietà di Dunwoody $M(a, b, c, n, r, s)$ è il rivestimento fortemente ciclico ad n -fogli della varietà $M(a, b, c, 1, r, 0)$ ramificato su un $(1, 1)$ -nodo $K = K(a, b, c, r)$ dipendente solo dai parametri a, b, c, r . Inoltre, la varietà $M(a, b, c, 1, r, 0)$ è omeomorfa a:*

- (1) \mathbf{S}^3 , se $p_\sigma = \pm 1$;
- (2) $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, se $p_\sigma = 0$;
- (3) ad uno spazio lenticolare $L(p, q)$, con $p = p_\sigma$, se $|p_\sigma| > 1$.

L'(1, 1)-nodo $K(a, b, c, r)$ del teorema precedente, con $a + b + c > 0$, ammette una naturale $(1, 1)$ -decomposizione $(H, A) \cup_\varphi (H', A')$, tale che gli archi di \mathcal{E}' del diagramma disegnato in Figura 4.4 rappresentano la curva

¹L'orientazione standard di $H(0, 0, 0, n, 0, s)$ consiste nell'orientare le circonferenze canoniche C'_i (risp. C''_i) in senso orario (risp. antiorario) e le restanti curve (chiuse) in senso orario.

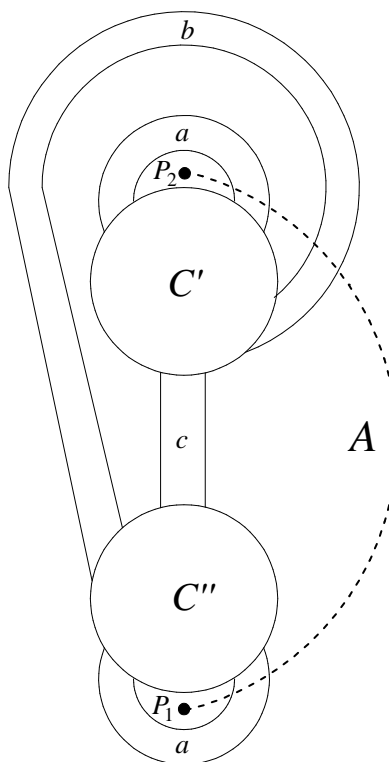


Figura 4.4: Il diagramma $H(a, b, c, 1, r, 0)$, con $a + b + c > 0$.

$\varphi(\beta') = \psi(\beta)$, con $\psi \in \text{PMCG}_2(\mathbb{T})$. Il gruppo fondamentale dell'(1,1)-nodo $K = K(a, b, c, r)$, con $a + b + c > 0$, può essere letto sul diagramma di Dunwoody $H(a, b, c, 1, n, 0)$ nel modo seguente: la relazione $r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = i\psi(\bar{\beta})$ che determina la presentazione di $\pi_1(L(p, q) - K, *)$ data nella Proposizione 2.3.1 si può ottenere camminando lungo gli archi di \mathcal{E}' seguendo una fissata orientazione: ad ogni arco di \mathcal{E}' è associata una parola nelle lettere $\bar{\alpha}$ e $\bar{\gamma}$ che rappresenta la sua classe di omotopia nel gruppo fondamentale di $H - A$, dove il disco propriamente immerso che è ombreggiato in neretto in Figura 4.5 e di cui la circonferenza c è bordo è contratto al punto base $*$.

Osservazione 4.1.2. Si noti che $-p_\sigma$ (risp. $-q_\sigma$) non è altro che la somma degli esponenti di $\bar{\alpha}$ (risp. $\bar{\gamma}$) in $r(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$. In altre parole si ha $p_\sigma = -p$ e $q_\sigma = -q''$, con $\psi(\beta) = p\alpha + q'\beta + q''\gamma$ in $H_1(\partial H - \partial A)$.

Denotiamo con \mathcal{H} la classe degli (1,1)-nodi K tali che esiste una varietà di

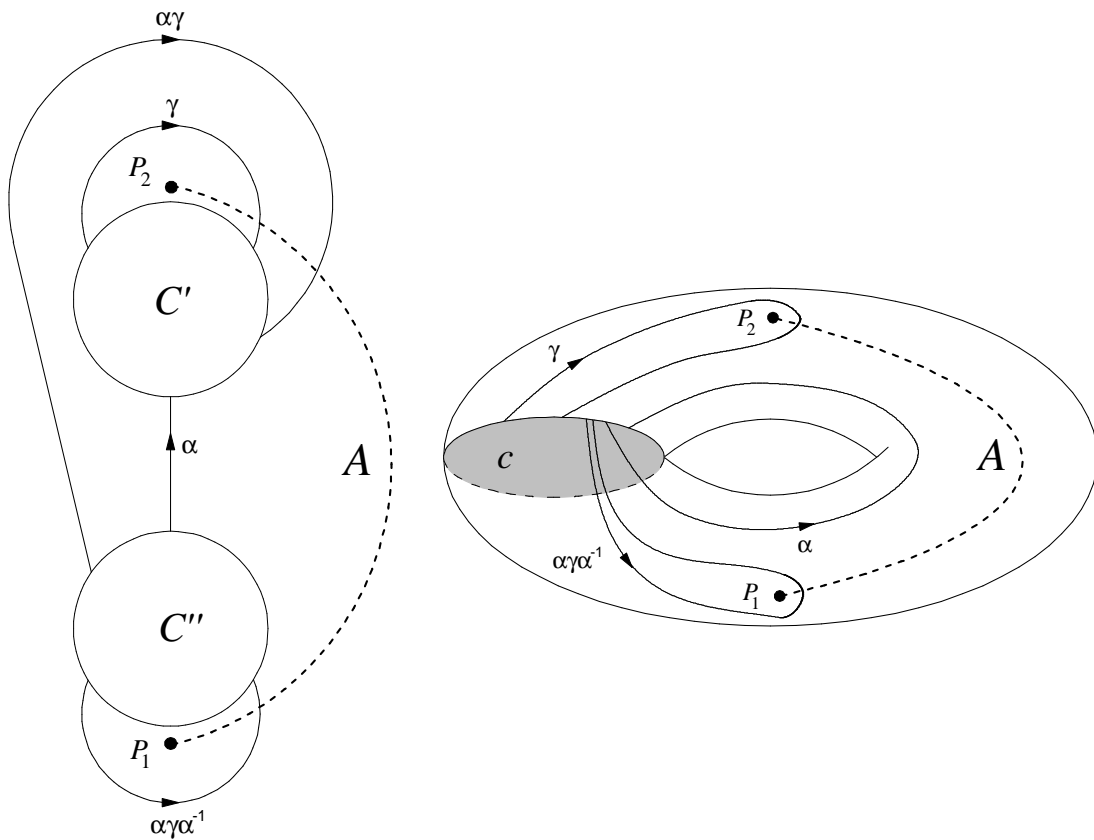


Figura 4.5: Calcolo del gruppo fondamentale di $K(a, b, c, r)$.

Dunwoody $M(a, b, c, n, r, s)$ che è rivestimento fortemente ciclico ramificato di $K = K(a, b, c, r)$ come descritto nel Teorema 4.1.1. Il seguente risultato mostra che \mathcal{H} contiene tutti i nodi a due ponti in \mathbf{S}^3 .

Teorema 4.1.2. [20] *La sestupla $\sigma_1 = (a, 0, 1, 1, r, 0)$ con $\gcd(2a+1, 2r) = 1$ è ammissibile. Inoltre, se $s = -q_\sigma$, allora la sestupla $\sigma_n = (a, 0, 1, n, r, s)$ è ammissibile per ogni $n > 1$ e la varietà di Dunwoody $M(a, 0, 1, n, r, s)$ è il rivestimento ciclico ad n -fogli di \mathbf{S}^3 ramificato sul nodo a due ponti $\mathbf{b}(2a+1, 2r)$.*

Nella prossima sezione dimostreremo che in effetti si ha $\mathcal{K}_{1,1} = \mathcal{H}$.

4.2 Legami con gli (1,1)-nodi

In questa sezione dimostriamo il teorema annunciato all'inizio del capitolo, ossia che ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di un (1,1)-nodo è una varietà di Dunwoody. Inoltre descriviamo un'algoritmo che permette di trovare i parametri di Dunwoody dei rivestimenti ciclici ramificati dei nodi torici in \mathbf{S}^3 .

Teorema 4.2.1. *Ogni rivestimento fortemente ciclico ramificato di un (1,1)-nodo è una varietà di Dunwoody.*

Dimostrazione. Sia $K \subset L(p, q)$ un (1,1)-nodo e sia

$$\varphi : (\partial H', \partial A') \rightarrow (\partial H, \partial A)$$

un omeomorfismo che rovescia le orientazioni e che definisce una (1,1)-decomposizione $(L(p, q), K) = (H, A) \cup_{\varphi} (H', A')$ di K . Sia β (risp. β') un meridiano di ∂H (risp. $\partial H'$) che borda un disco in H (risp. H') che non interseca A (risp. A'). Le curve β e $\varphi(\beta')$ determinano un diagramma di Heegaard su $\partial H = T$ associato alla (1,1)-decomposizione, che non interseca $\partial A = \{P_1, P_2\}$. Sia H_{φ} il diagramma di Heegaard aperto su \mathbf{S}^2 ottenuto tagliando T lungo β . Questo sarà costituito dalle circonferenze canoniche C' e C'' ottenute dal taglio lungo β e dalla curva chiusa o dall'insieme di archi aventi estremi su C' e C'' corrispondenti a $\varphi(\beta')$, che denoteremo con \mathcal{E}' . Supponiamo ora che si verifichi una delle situazioni seguenti:

- (1) H_{φ} è il diagramma disegnato in Figura 4.6 a);
- (2) H_{φ} è il diagramma disegnato in Figura 4.6 b);
- (3) esistono degli interi a, b, c, r , con $a, b, c \geq 0$ ed $a + b + c > 0$, tali che H_{φ} è il diagramma $H(a, b, c, 1, r, 0)$, disegnato in Figura 4.4.

Nel primo caso K è il nodo $\mathbf{S}^1 \times \{Q\} \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, dove Q è un punto di \mathbf{S}^2 ; in altre parole K è un generatore standard per il primo gruppo di omologia di $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$. Quindi si ha:

$$H_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 - K) = \langle \alpha, \gamma \mid \gamma \rangle.$$

Perciò, per il Teorema 3.1.1, non esiste nessun rivestimento fortemente ciclico ramificato di K .

Nel secondo caso K è il nodo banale in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, quindi si ha:

$$H_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 - K) = \langle \alpha, \gamma \mid \emptyset \rangle.$$

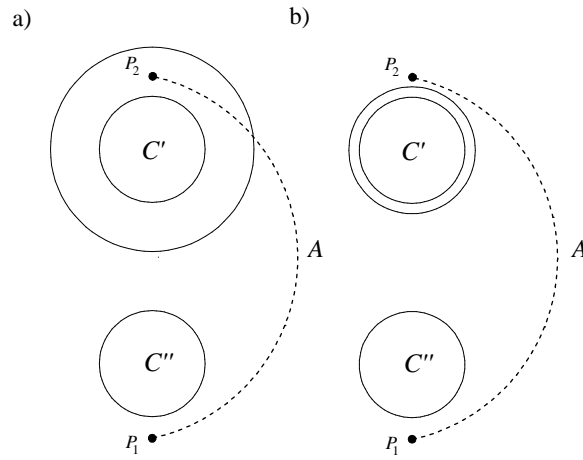


Figura 4.6: Diagramma di Heegaard associato al: a) generatore standard per $H_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2)$ b) nodo banale in $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$.

Perciò, per il Teorema 3.1.1, esistono esattamente n rivestimenti fortemente ciclici ramificati ad n -fogli di K dipendenti dalla scelta dell'immagine $s \in \mathbb{Z}_n$ della classe di omologia di α attraverso la mappa di monodromia ω . Se denotiamo con $C_{n,s}$ il rivestimento ad n -fogli ottenuto per $\omega(\alpha) = s$, si ha $C_{n,s} = M(0, 0, 0, n, 0, s)$. In realtà, come già notato in precedenza, $M(0, 0, 0, n, 0, s)$ è la somma connessa di n copie di $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, per ogni $s \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo adesso l'ultimo caso. Se $f : M \rightarrow L(p, q)$ è un rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di K , per il Teorema 3.2.1, l'(1, 1)-decomposizione di K si solleva ad una decomposizione di Heegaard di genere n per M . Quindi il sollevamento della circonferenza C' (risp. C'') è costituito da n circonferenze C'_1, \dots, C'_n (risp. C''_1, \dots, C''_n). Inoltre, se denotiamo con ω_f la monodromia associata al rivestimento, la condizione $\omega_f(\gamma) = 1$ (a meno di equivalenza) implica che il sollevamento di un arco $v' \in \mathcal{E}'$ avente entrambi gli estremi sulla circonferenza C' (risp. C'') è costituito da n archi che collegano la circonferenza C'_i (risp. C''_i) con la circonferenza C'_{i+1} (risp. C''_{i+1}) mentre il sollevamento di un arco $v' \in \mathcal{E}'$ che collega la circonferenza C' con la circonferenza C'' è costituito da n archi che collegano la circonferenza C'_i con la circonferenza C''_{i+j} , dove $j \in \{0, 1\}$ è il valore assoluto dell'esponente di γ nella parola associata all'arco v' in $\pi_1(L(p, q) - K, *)$ (vedi Figura 4.5), per $i = 1, \dots, n$, dove gli indici delle circonferenze sono da considerare

mod n . Quindi il sollevamento \tilde{H}_φ di H_φ è il diagramma di Heegaard aperto associato al grafo $\Gamma(a, b, c, n)$ illustrato in Figura 4.1 e la regola di incollamento consiste nell'incollare C'_i con C''_{i-s} identificando i vertici con la stessa numerazione, dove² s è $\omega_f(\alpha)$. In altre parole M è la varietà di Dunwoody $M(a, b, c, n, r, s)$, con r opportunamente scelto.

Quindi per dimostrare il teorema è sufficiente far vedere che, in generale, il diagramma H_φ è equivalente ad uno dei tre diagrammi discussi sopra. Per dimostrarlo, faremo vedere che è possibile portare H_φ in una delle forme volute attraverso un numero finito di movimenti di Singer. I movimenti che utilizzeremo nella dimostrazione sono descritti nell'appendice mentre una descrizione più completa si può trovare in [51].

A meno di isotopia, possiamo sempre supporre che a $\varphi(\beta') = \psi(\beta)$ corrisponda in H_φ un insieme di archi e non una curva chiusa. Fissiamo innanzitutto alcune notazioni. Poniamo $\Sigma = \mathbf{S}^2 - \{P_1, P_2\}$ e $\Sigma_i = \mathbf{S}^2 - P_i$, per $i = 1, 2$. Il diagramma di Heegaard ottenuto dopo k passi sarà denotato con H_k , le circonferenze canoniche di tale diagramma saranno denotate con C'_k e C''_k , mentre \mathcal{E}'_k denoterà l'insieme di archi o la curva chiusa di H_k corrispondente a $\varphi(\beta')$. In particolare $H_\varphi = H_0$, $C' = C'_0$, $C'' = C''_0$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_0$. Inoltre indicheremo con \mathcal{A}'_k ed \mathcal{A}''_k l'insieme di archi di H_k che hanno entrambi gli estremi su, rispettivamente, C'_k e C''_k e con \mathcal{B}_k l'insieme degli archi di H_k che collegano C'_k con C''_k . Si noti che ad ogni passo $|\mathcal{A}'_k| = |\mathcal{A}''_k|$. Denotiamo con $v(C'_k)$ il numero dei vertici di C'_k e con $v(C''_k)$ il numero dei vertici di C''_k . Chiaramente, ad ogni passo k , si ha $v(C'_k) = v(C''_k)$. Infine diremo che un arco $v \in \mathcal{A}'_k$ (risp. \mathcal{A}''_k) è banale in, rispettivamente, Σ , Σ_1 , Σ_2 se è isotopo, tramite un'isotopia ad estremi fissati, ad un arco su C'_k (risp. C''_k) in, rispettivamente, $\Sigma - (\text{int}(D'_k) \cup \text{int}(D''_k))$, $\Sigma_1 - (\text{int}(D'_k) \cup \text{int}(D''_k))$, $\Sigma_2 - (\text{int}(D'_k) \cup \text{int}(D''_k))$, dove D'_k e D''_k sono i dischi canonici di H_k .

Sia $v \in \mathcal{A}'_0$ un arco banale in Σ e sia C'_1 una circonferenza che contiene al suo interno C'_0 e v , ma non i punti P_1 e P_2 (vedi Figura 4.7). Applicando il movimento di Singer di tipo IB a C'_1 otteniamo un diagramma H_1 nel quale l'arco v è stato eliminato ed i due archi uscenti dai vertici A_0 ed A_1 su C'_0 con la stessa numerazione degli estremi di v su C'_0 sono stati incollati tramite l'identificazione di A_0 con A_1 .

Chiaramente la stessa cosa può essere fatta per un'arco di \mathcal{A}''_0 banale in Σ .

²Si noti che dal Teorema 3.1.1 segue che s soddisfa la relazione $ps + q'' \equiv 0 \pmod{n}$, che, per l'Osservazione 4.1.2, non è altro che la condizione necessaria per le sestuple ammissibili riportata in [20].

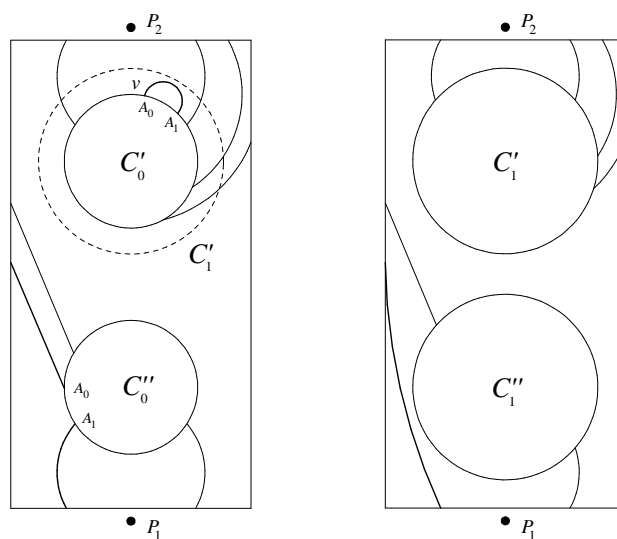


Figura 4.7: Movimento di Singer di tipo IB.

Poiché ogni volta che passiamo da H_k ad H_{k+1} tramite un'operazione di questo tipo si ha $v(C'_{k+1}) = v(C'_k) - 2$, in un numero finito di passi otteniamo un diagramma D_{k_1} in cui tutti gli archi di $\mathcal{A}'_{k_1} \cup \mathcal{A}''_{k_1}$ sono non banali in Σ . Supponiamo che $\mathcal{A}'_{k_1}, \mathcal{A}''_{k_1} \neq \emptyset$. Allora esistono $i, j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$, tali che ogni arco di \mathcal{A}'_{k_1} (risp. \mathcal{A}''_{k_1}) è banale in Σ_i (risp. Σ_j), ma non in Σ_j (risp. Σ_i). Infatti, è facile vedere che se esistesse un arco in \mathcal{A}'_{k_1} (risp. \mathcal{A}''_{k_1}), non banale sia in Σ_1 che in Σ_2 , dovrebbe esistere un arco in \mathcal{A}''_{k_1} (risp. \mathcal{A}'_{k_1}) banale in Σ .

Questo, in particolare, significa che ogni arco v in \mathcal{A}'_{k_1} (risp. \mathcal{A}''_{k_1}) è tale che la curva chiusa ottenuta dall'unione di v con uno dei due archi individuati da v su C'_{k_1} (risp. C''_{k_1}) divide \mathbf{S}^2 in due dischi ognuno dei quali contiene uno ed un solo punto tra P_1 e P_2 . Quindi, se X, X', X'' sono le circonferenze disegnate in Figura 4.8 e se indichiamo con B, B' e B'' i dischi bordati da X, X' e X'' rispettivamente, che non contengono P_1 e P_2 , ogni arco di \mathcal{A}'_{k_1} (risp. \mathcal{A}''_{k_1}) è come segue: parte da C'_{k_1} (risp. C''_{k_1}), compie h_1 (risp. h_2) giri intorno a C'_{k_1} (risp. C''_{k_1}) rimanendo all'interno di B' (risp. B'') e h_3 mezzi giri intorno a X mantenendosi all'interno di B , gira intorno a P_2 (risp. P_1) se h_3 è pari o intorno a P_1 (risp. P_2) altrimenti e torna indietro parallelamente terminando su C'_{k_1} (risp. C''_{k_1}). Per convenzione, un arco compie $|h_i|$ giri o mezzi giri in senso antiorario (risp. orario) se il segno di h_i è positivo (risp.

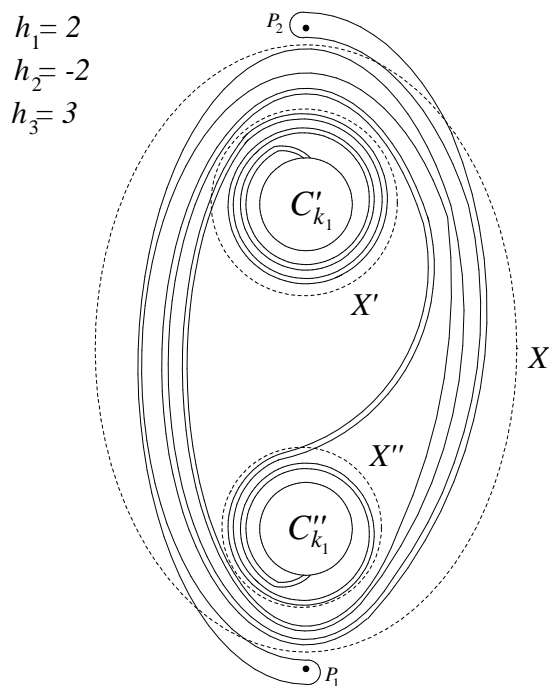


Figura 4.8: Archi di \mathcal{A}'_{k_1} e \mathcal{A}''_{k_1} per $h_1 = 2$, $h_2 = -2$ e $h_3 = 3$.

negativo), per $i = 1, 2, 3$.

Sia H_{k_2} il diagramma ottenuto applicando $|h_1|$ volte il movimento di Singer di tipo $\text{IIB}^{\text{sgn}(h_1)}$ lungo la circonferenza X' , $|h_2|$ volte il movimento di Singer di tipo $\text{IIB}^{\text{sgn}(h_2)}$ lungo la circonferenza X'' , e $|h_3|$ volte il movimento di Singer di tipo $\text{IIA}^{\text{sgn}(h_3)}$ lungo la circonferenza X . Allora gli archi appartenenti a $\mathcal{A}'_{k_2} \cup \mathcal{A}''_{k_2}$ sono sicuramente del tipo richiesto. Inoltre la condizione di non intersezione di ogni coppia di archi di \mathcal{E}'_{k_2} , implica che, esiste $z \in \mathbb{Z}$ tale che ogni arco di \mathcal{B}_{k_2} è, a meno di isotopia³, come illustrato in Figura 4.9. Di nuovo, applicando $|z|$ volte il movimento di Singer di tipo $\text{IIB}^{\text{sgn}(z)}$ lungo la circonferenza Y disegnata in Figura 4.9, si ottiene il diagramma cercato⁴.

Analizziamo cosa accade quando $\mathcal{A}'_{k_1} = \mathcal{A}''_{k_1} = \emptyset$. Abbiamo due casi:

³Un arco appartenente a \mathcal{B}_{k_2} che compie j giri intorno a C''_{k_2} rimanendo all'esterno di un disco contenente P_1 e C''_{k_2} è isotopo ad un arco che compie $-j$ giri intorno a C'_{k_2} rimanendo all'esterno di un disco che contiene P_2 e C'_{k_2} .

⁴Si noti che l'applicazione del movimento di Singer di tipo IIB lungo la circonferenza Y non modifica gli archi di $\mathcal{A}'_{k_2} \cup \mathcal{A}''_{k_2}$.

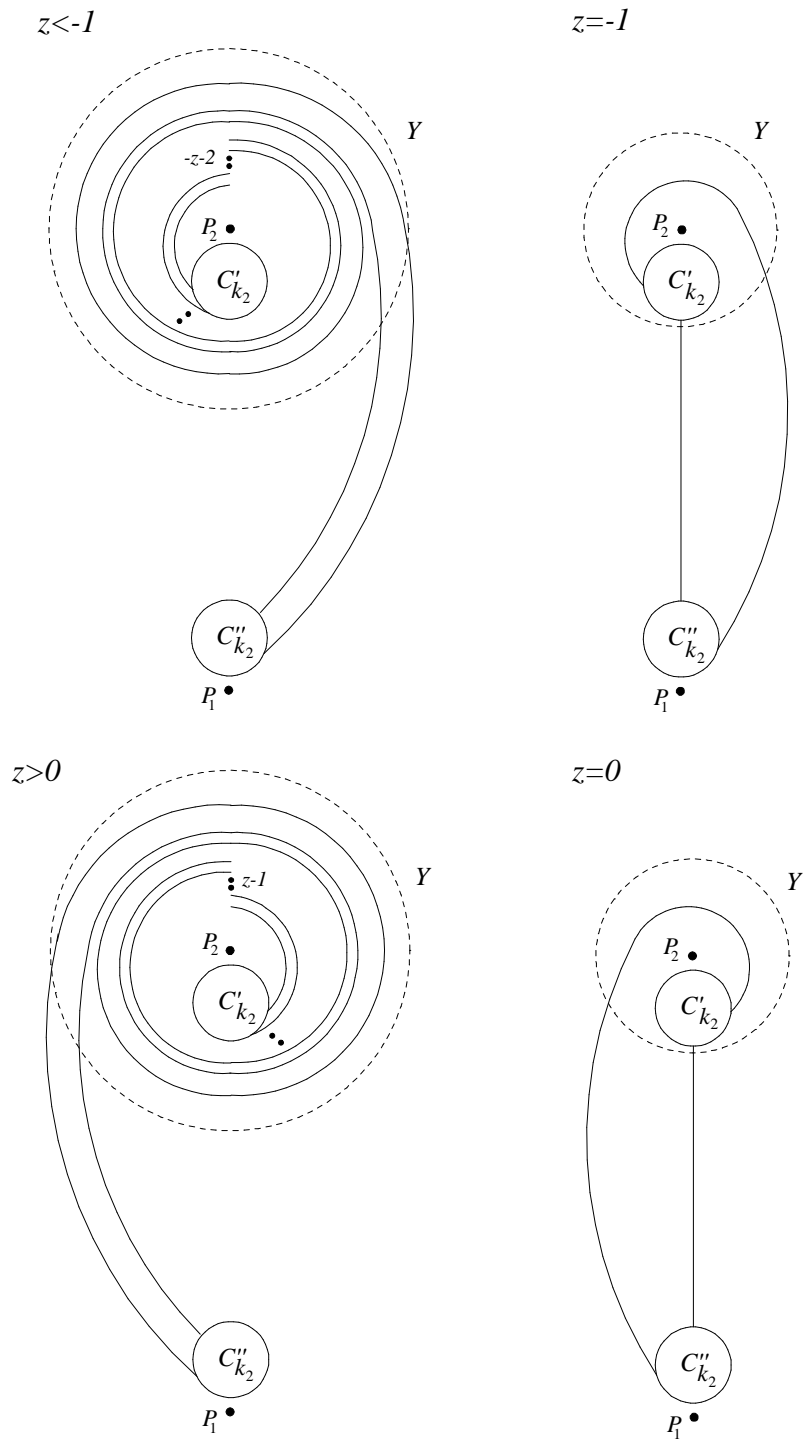


Figura 4.9: Archi di \mathcal{B}_{k_2} .

$$(1) \ v(C'_{k_1}) \neq 0;$$

$$(2) \ v(C'_{k_1}) = 0.$$

Nel primo caso \mathcal{E}'_{k_1} continua ad essere un'insieme di archi e coincide con \mathcal{B}_{k_1} . Analogamente a quanto fatto sopra, applicando un numero opportuno di volte il movimento di Singer di tipo IIB $^{\pm 1}$ lungo le circonferenze X', X'' oppure Y possiamo evitare che gli archi di \mathcal{B}_{k_1} compiano dei giri intorno a C'_{k_1} oppure C''_{k_1} ed applicando un numero opportuno di volte il movimento di Singer di tipo IIA $^{\pm 1}$ lungo la circonferenza X possiamo evitare che gli archi di \mathcal{B}_{k_1} compiano dei giri intorno a X e quindi ridurre il diagramma nella forma voluta.

Nel secondo caso ovviamente \mathcal{E}'_{k_1} è una curva chiusa. Per ottenere la forma

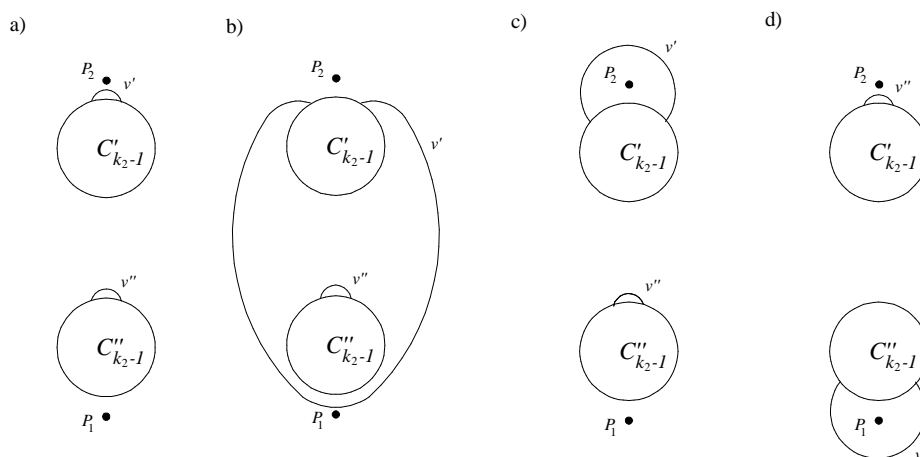


Figura 4.10: Il diagramma H_{k_2-1} .

voluta (ossia una delle due illustrate in Figura 4.6) consideriamo il diagramma H_{k_1-1} ; tale diagramma avrà solo due archi $v' \in \mathcal{A}'_{k_1-1}$ e $v'' \in \mathcal{A}'_{k_1-1}$ uno dei quali è banale in Σ . Possiamo supporre che sia ad esempio v'' . Allora applicando opportunamente i movimenti di Singer di tipo IIA e IIB, analogamente a quanto fatto sopra⁵, ci si può ridurre ad uno dei diagrammi illustrati in Figura 4.10, che chiamiamo H_{k_2-1} . Più precisamente, se D è il disco su \mathbf{S}^2 bordato dalla curva chiusa ottenuta dall'unione di v' con uno dei due archi

⁵Si noti che tali movimenti non alterano v'' , ma possono scambiare le due circonferenze canoniche.

individuati da v' su C'_{k_1-1} che contiene al suo interno la circonferenza C''_{k_1-1} , il diagramma H_{k_2-1} sarà quello illustrato in Figura 4.10 a), b), c), d), se D contiene, rispettivamente, entrambi i punti P_1 e P_2 , nessuno dei punti P_1 , P_2 , solo P_1 , solo P_2 . Ora, applicando il movimento di Singer di tipo IB in modo da eliminare v'' e tenendo conto che le identificazioni dei vertici devono essere tali per cui la curva chiusa che viene a formarsi non deve disconnettere il toro, si ha che il diagramma H_{k_2} in tal modo ottenuto è quello cercato. \square

Corollario 4.2.1. *La classe \mathcal{H} degli degli (1,1)-nodi K tali che esiste una varietà di Dunwoody $M(a, b, c, n, r, s)$ che è rivestimento fortemente ciclico ramificato ad n -fogli di $K = K(a, b, c, r)$ coincide con la classe $\mathcal{K}_{1,1}$ di tutti gli (1,1)-nodi.*

A conclusione del capitolo (e della tesi) illustriamo un risultato per i nodi torici analogo a quello trovato in [20] per i nodi a due ponti (vedi Proposizione 4.1.2), ossia descriviamo un'algoritmo che permette di determinare i parametri della varietà di Dunwoody che è il rivestimento ciclico di un nodo torico.

Procederemo nella maniera seguente: sia $\psi = \psi' \psi_{1,0}$ la rappresentazione standard di un nodo torico $\mathbf{t}(k, h)$, ottenuta come descritto nel Teorema 2.5.1. Allora $\psi_{1,0} = t_\beta t_\alpha t_\beta$ e $\psi' \in \ker \Omega$ è il risultato di successive composizioni degli elementi τ_m^{-1} e τ_l^{-1} . Quindi per calcolare i parametri (a, b, c, r) tali che $H_\varphi = H(a, b, c, 1, r, 0)$, l'idea è di illustrare come il diagramma di Heegaard associato al nodo banale $K(0, 0, 0, 0) \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$, ossia il diagramma di Dunwoody $H(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, si modifica tramite l'applicazione iniziale di $\psi_{1,0}$ e l'applicazione successiva degli elementi τ_m^{-1} e τ_l^{-1} che determinano ψ' . Ma i diagrammi di Heegaard che otterremo ad ogni passo non saranno in generale dei diagrammi di Dunwoody e, solo una volta ottenuto il diagramma finale H_φ , sarà possibile "normalizzarlo" (attraverso opportuni movimenti di Singer, come mostrato nella dimostrazione del Teorema 4.2.1) per ottenere un diagramma di Dunwoody. Quindi, per illustrare l'azione di τ_m^{-1} e τ_l^{-1} è necessario considerare dei diagrammi più generali di quelli di Dunwoody. Più precisamente, indichiamo con $H_z(a, b, c, 1, r, 0)$ il diagramma di Heegaard illustrato in Figura 4.11, dove assumiamo la convenzione che un arco con un'etichetta k indica k archi paralleli, e facciamo variare il parametro r su tutto \mathbb{Z} (nei diagrammi di Dunwoody generalmente r si considera \pmod{d}). Infine indichiamo con $K_z(a, b, c, r)$ l'(1,1)-nodo associato al diagramma di Heegaard $H_z(a, b, c, 1, r, 0)$. Allora si ha il seguente risultato.

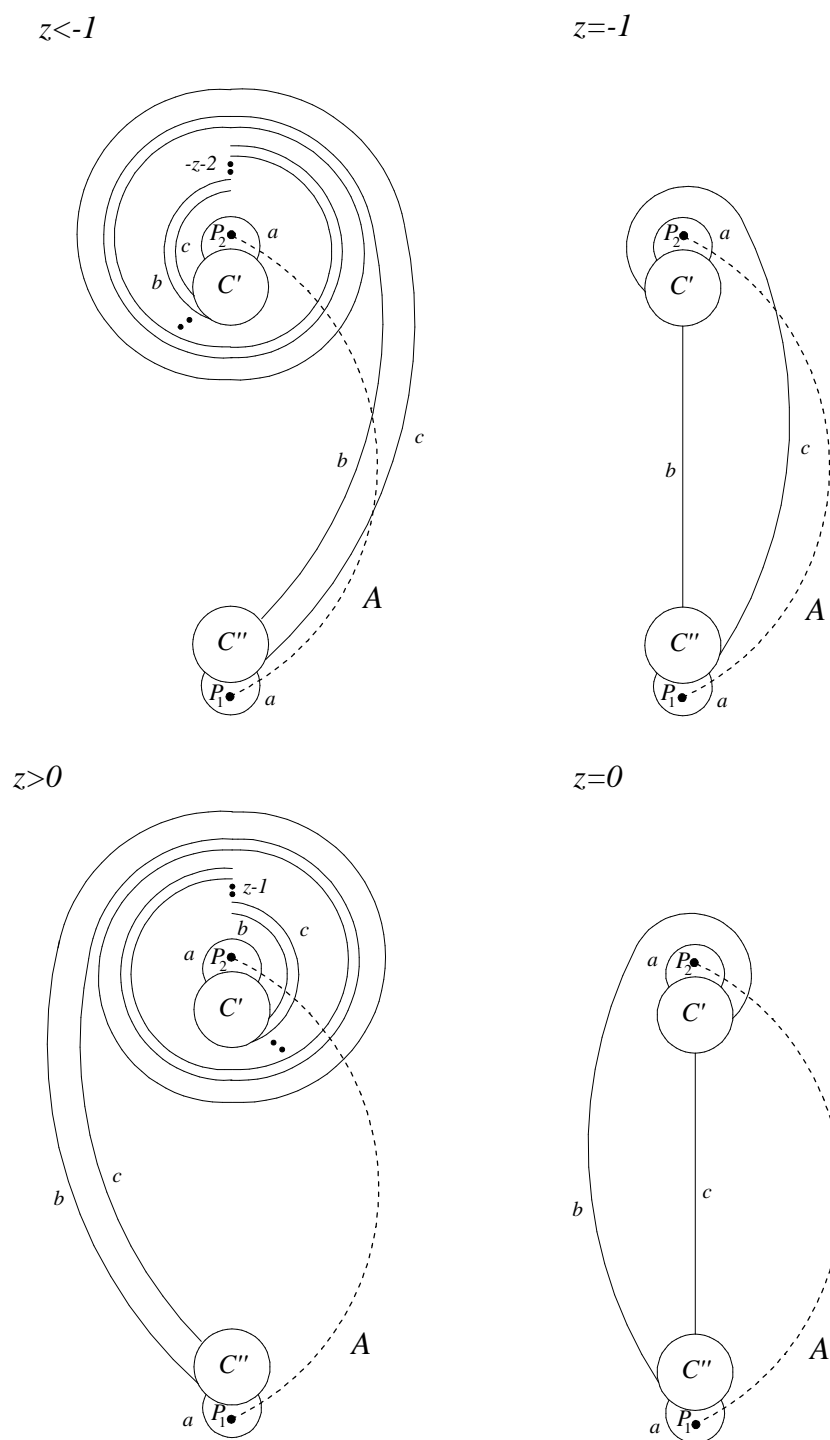


Figura 4.11: Il diagramma di Heegaard $H_z(a, b, c, 1, r, 0)$.

Proposizione 4.2.1. *Sia $\mathbf{t}(k, h) \subset \mathbf{S}^3$ un nodo torico e sia $\psi = \psi' \psi_{1,0}$ la rappresentazione standard di $\mathbf{t}(k, h)$ ottenuta come descritto nel Teorema 2.5.1. Allora $\mathbf{t}(k, h)$ è il nodo $K(a, b, c, r) \cong K_z(a, b, c, r)$ dove i parametri a, b, c, r, z sono determinati utilizzando il seguente algoritmo:*

- (1) *il nodo banale $K_{\psi_{1,0}} \subset \mathbf{S}^3$ è il nodo $K_0(0, 0, 1, 0)$;*
- (2) *se $K_\psi = K_z(a, b, c, r)$ allora $K_{\tau_m^{-1}\psi} = K_{z-1}(a, b, c, r + d)$, con $d = 2a + b + c$;*
- (3) *se $K_\psi = K_z(a, b, c, r)$ allora $K_{\tau_l^{-1}\psi} = K_{z'}(a', b', c', r')$, dove*

$$\begin{cases} a' = a + m \\ b' = (r - 2h) - kd \\ c' = (k + 1)d - (r - 2h) = d - b' \\ r' = a + m + h \\ z' = k \end{cases}$$

essendo:

$$h = \begin{cases} a + b + c & \text{se } z < -1 \\ a + c & \text{se } z = -1, \\ a & \text{se } z > -1 \end{cases}, \quad m = \begin{cases} (-z - 1)c + (-z - 2)b & \text{se } z < -1 \\ 0 & \text{se } z = -1, \\ (z + 1)b + zc & \text{se } z > -1 \end{cases}$$

e $k = \lfloor (r - 2h)/d \rfloor$, con $d = 2a + b + c$.

Dimostrazione. In Figura 4.12 è illustrato il risultato dell'applicazione di $\psi_{1,0} = t_\beta t_\alpha t_\beta$ sul diagramma di Dunwoody banale $H(0, 0, 0, 1, 0, 0)$: il risultato è il diagramma $H(0, 0, 1, 1, 0, 0)$, ossia $K_{\psi_{1,0}} = K_0(0, 0, 1, 0)$.

Per vedere qual è l'azione di τ_m^{-1} e τ_l^{-1} basta ricordare che l'effetto di τ_m^{-1} e τ_l^{-1} è di far scivolare P_2 lungo, rispettivamente, un meridiano standard ed un parallelo standard del toro, in senso contrario all'orientazione fissata su tali curve.

L'azione di τ_m^{-1} si ricava facilmente osservando che è la composizione di t_β^{-1} con t_γ : l'effetto di t_β^{-1} (risp. t_γ) su un diagramma di Heegaard non è altro che l'applicazione di un movimento di Singer di tipo IIB⁻¹ (risp. IIB) lungo la curva β (risp. γ). Ma la curva β è isotopa alla curva X' illustrata in Figura 4.8 e la curva γ è isotopa alla curva Y illustrata il Figura 4.9, da cui

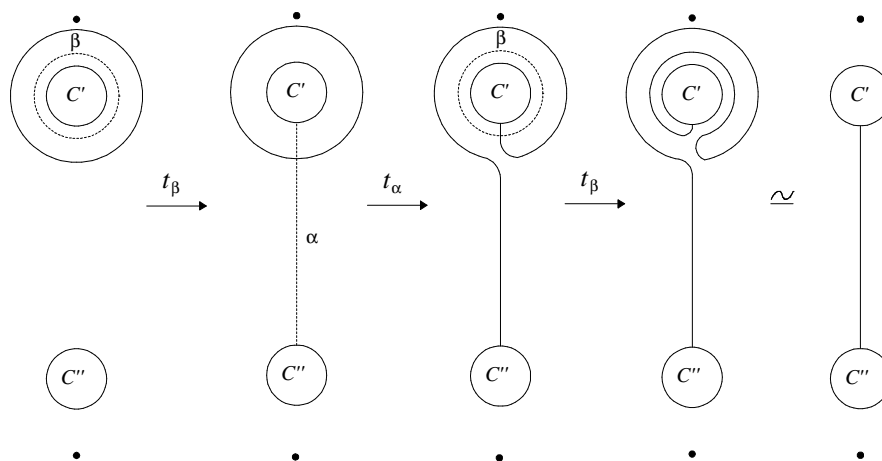


Figura 4.12: Azione di $\psi_{1,0}$ su $K_0(0,0,0,0)$.

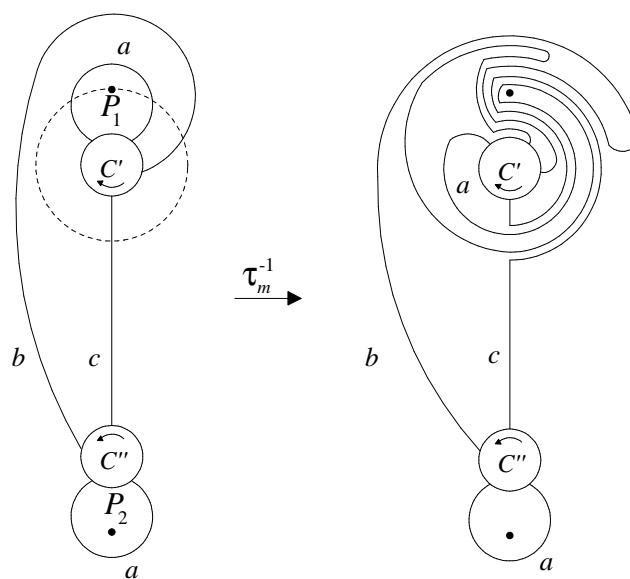


Figura 4.13: Azione di τ_m^{-1} su $K_0(a,b,c,r)$.

si deduce che l'effetto di t_β^{-1} è di far compiere a tutti gli archi uscenti da C' un giro in senso antiorario al di sotto di P_2 , cioè di aumentare il valore del parametro r di $d = 2a + b + c$ mentre l'effetto di t_γ è quello di diminuire il valore del parametro z di un'unità. In conclusione, quindi, τ_m^{-1} fa passare dal diagramma $H_z(a, b, c, 1, r, 0)$ al diagramma $H_{z-1}(a, b, c, 1, r + d, 0)$. In Figura 4.13 è illustrata l'azione di τ_m^{-1} per $z = 0$.

Studiare l'azione di τ_l^{-1} è la parte più complicata. Questo è dovuto al fatto che la posizione di un parallelo standard del toro sul diagramma dipende dal valore del parametro r . In particolare, al variare di r cambia il numero di intersezioni che un parallelo ha con gli archi di un dato diagramma. Sia h il valore di r per cui il numero di tali intersezioni è minimo. Sceglieremo sempre come parallelo quello che collega il punto medio dei vertici con la numerazione d ed 1 su C' con il corrispondente punto su C'' . È facile vedere che si ha (vedi Figura 4.14):

$$h = \begin{cases} a + b + c & \text{se } z < -1 \\ a + c & \text{se } z = -1 \\ a & \text{se } z > -1 \end{cases}$$

e che per $r = h$ il parallelo ha esattamente $a + m$ intersezioni con gli archi del diagramma. Innanzitutto analizziamo il caso in cui $r = h$. In tal caso l'azione di τ_l^{-1} è illustrata in Figura 4.15, dove l'arco tratteggiato indica la posizione il parallelo. In questa figura e nelle successive la numerazione dei vertici di C' (risp. C'') avviene in senso orario (risp. antiorario) partendo dal vertice con numerazione 1 e, dato che k archi paralleli sono identificati in un unico arco con un'etichetta k , utilizziamo la convenzione che il numero assegnato ad un vertice del diagramma va inteso come il numero assegnato al vertice corrispondente al primo (rispetto all'orientazione della circonferenza) dei k archi paralleli. In tal caso otteniamo un diagramma ridotto ed è facile vedere che si ha $(a', b', c', r', z') = (a + m, d - h, h, a + m + h, -1)$. Del resto se $r = h \neq 0$ allora $-d \leq r - 2h = -h < 0$ cioè $k = -1$ che sostituito nella formula dell'enunciato dà la stessa espressione. Se invece $r = h = 0$ si ha $k = 0$ e quindi dall'enunciato si ottiene $(a', b', c', r', z') = (a + m, 0, d, a + m, 0)$ che è uguale al diagramma determinato dai parametri $(a + m, d, 0, a + m, -1)$. Ora analizziamo cosa accade quando $r > h$ oppure $r < h$. Il risultato dell'applicazione di τ_l^{-1} è illustrato in Figura 4.16. In entrambi i casi, le ulteriori

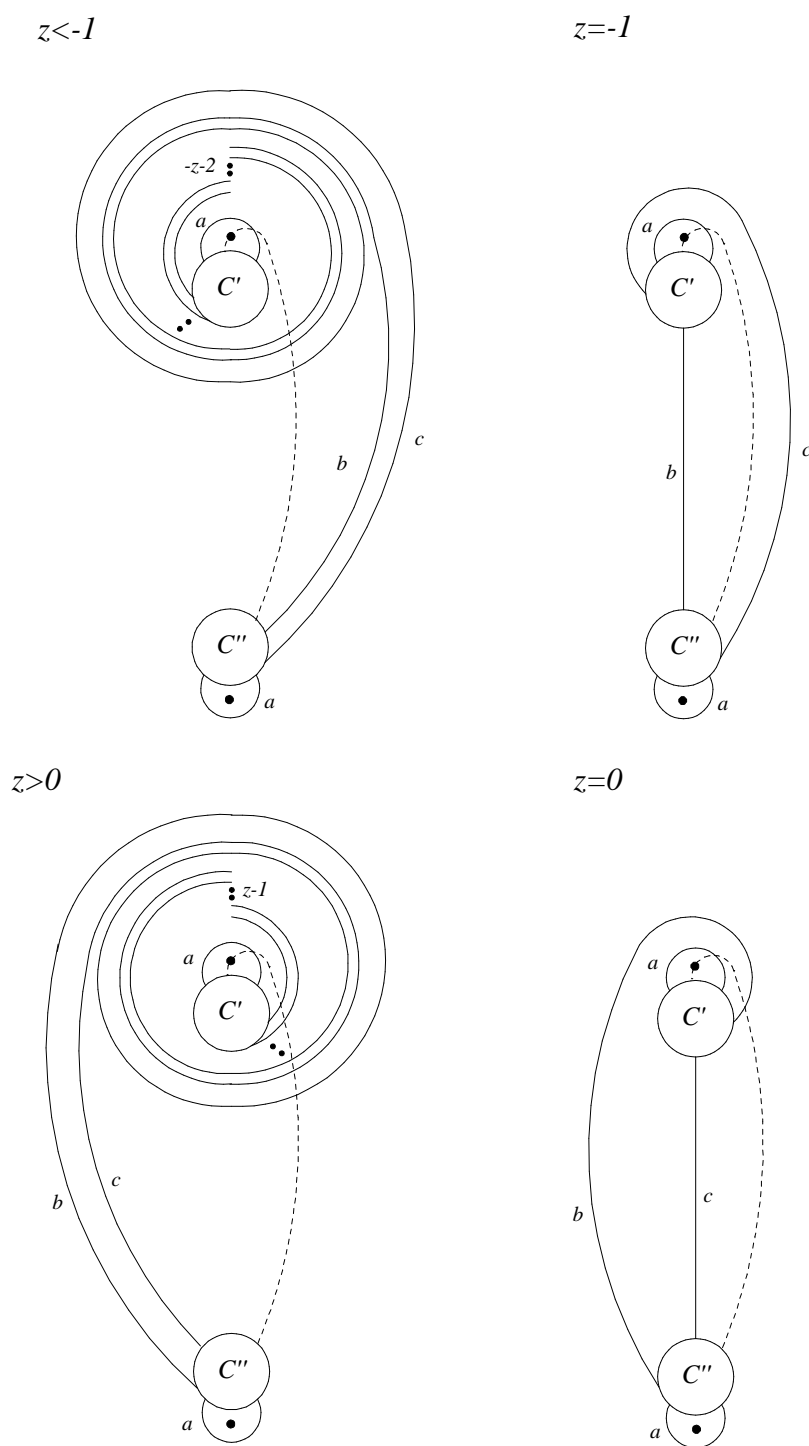


Figura 4.14: Determinazione del parametro h .

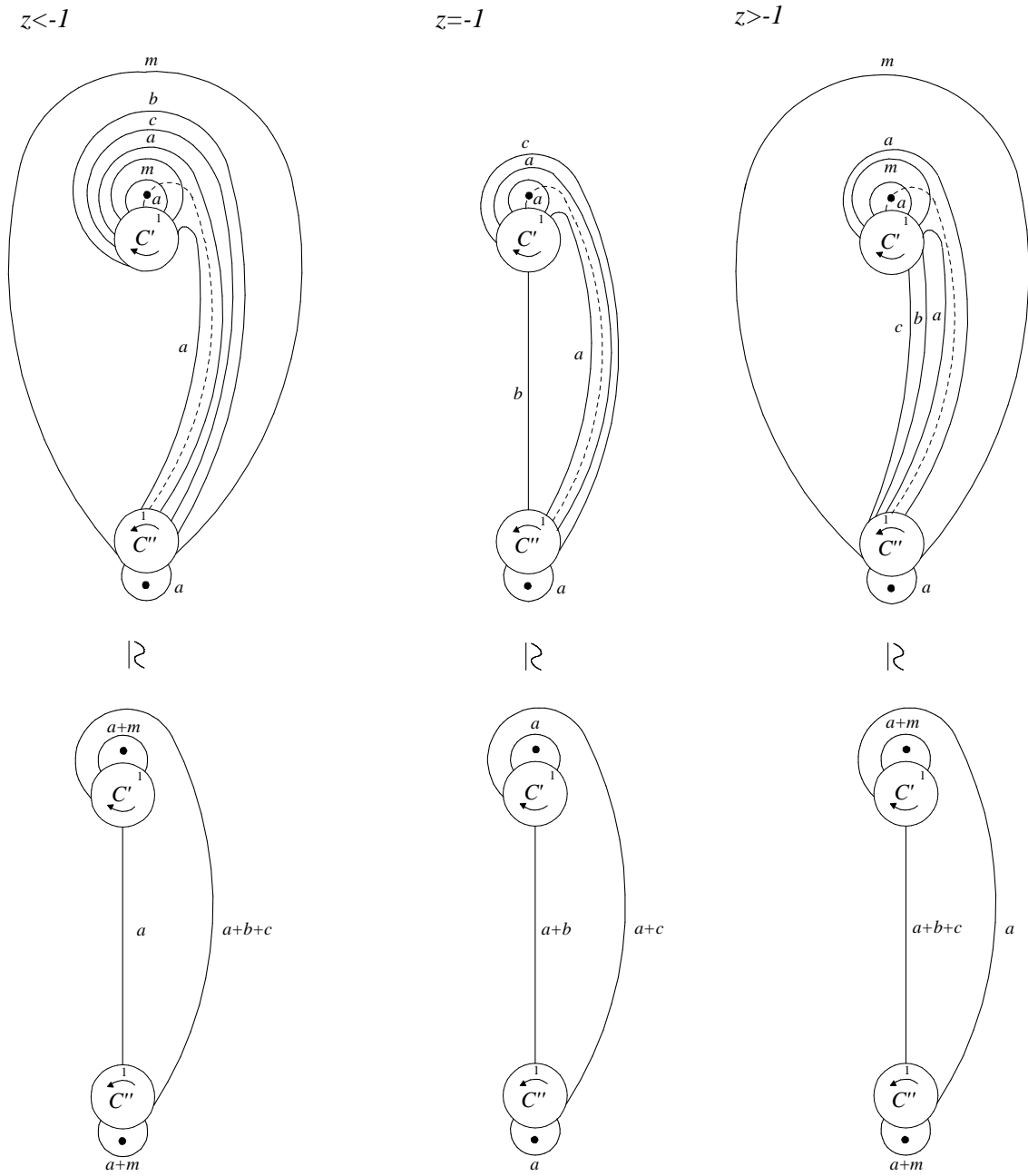


Figura 4.15: Azione di τ_l^{-1} su $K_z(a, b, c, r)$, per $r = h$.

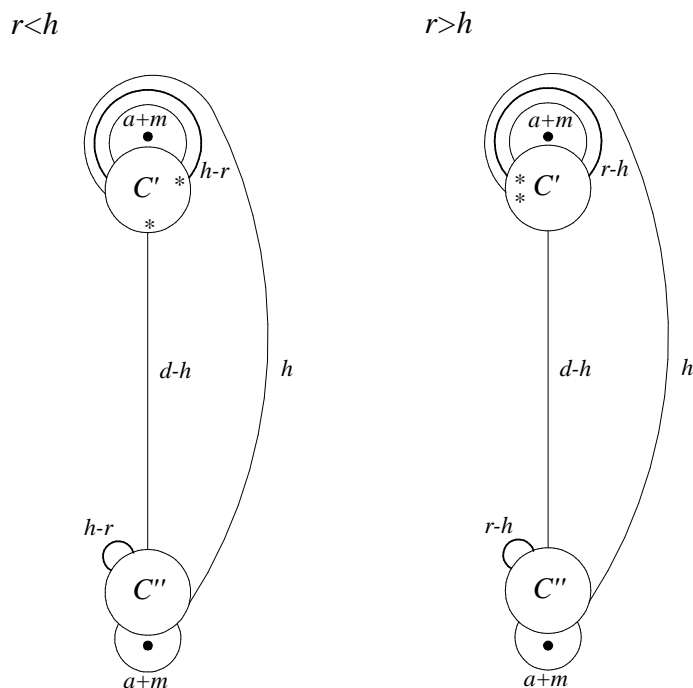


Figura 4.16: Azione di τ_i^{-1} su $K_z(a, b, c, r)$, per $r < h$ ed $r > h$.

$|r - h|$ intersezioni creano $|r - h|$ archi banali⁶ con estremi su C'' . In tal caso è possibile applicare $|r - h|$ volte il movimento di Singer di tipo IB per eliminare tali archi, in quanto il risultato dell'applicazione di questo movimento è un diagramma isotopo a quello di partenza. Questo porta all'identificazione degli archi i cui estremi su C' hanno la stessa numerazione degli archi che via via andiamo ad eliminare. La posizione degli archi banali dipende da caso a caso per cui quella illustrata in Figura 4.16 è indicativa: l' i -esimo arco banale ha estremi su C'' con numerazione $a + m + d + i$ ed $a + m + d + 2(r - h) - i + 1$ se $h < r$ e con numerazione $a + m + i$ ed $a + m + 2(h - r) - i + 1$ se $h > r$. Ad ogni applicazione del movimento di Singer di tipo IB si elimina un arco banale partendo dal più interno (che è l' $|r - h|$ -esimo arco banale che si incontra percorrendo C'' secondo la sua orientazione) per finire con il più esterno (che è il primo arco banale che si incontra percorrendo C'' secondo la sua

⁶Diciamo che un arco $v \in \mathcal{A}''$ è banale se è isotopo, tramite un'isotopia ad estremi fissati, ad un arco su C'' in $\Sigma - (\text{int } D' \cup \text{int } D'')$, con $\Sigma = \mathbf{S}^2 - \{P_1, P_2\}$ e D', D'' dischi canonici.

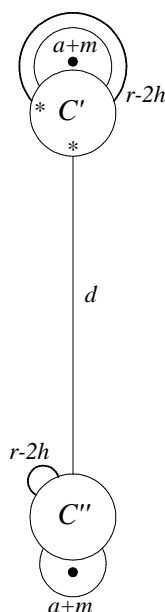


Figura 4.17: Studio dell'azione di τ_l^{-1} nel caso $r - h \geq h$.

orientazione). In figura l'asterisco indica come avvengono le identificazioni dei vertici su C' . Una volta concluse tali identificazioni e ridotto quindi il diagramma, si ha che come prima $a' = a + m$ ed $r' = a + m + h$ mentre il valore degli altri tre parametri dipende dal quoziente della divisione di $|r - 2h|$ per d . Supponiamo ad esempio che $r > h$ allora abbiamo due casi:

- (1) se $r - h < h$ otteniamo $b' = d - h + (r - h) = d + (r - 2h)$, $c' = h - (r - h) = 2h - r$ e $z' = -1$;
- (2) se $r - h \geq h$, dopo aver applicato h volte il movimento di Singer di tipo IB, otteniamo il diagramma illustrato in Figura 4.17. Applicando i restanti $r - 2h$ movimenti e continuando quindi le identificazioni, quello che accade è che d identificazioni aumentano il parametro z' di un unità, ossia, se k è l'intero definito da $k = \lfloor (r - 2h)/d \rfloor$, si ha che $b' = (r - 2h) - kd$, $c' = (k + 1)d - (r - 2h)$ e $z' = k$.

Analizzando in maniera del tutto analoga il caso $r < h$ si ottiene la formula cercata. □

Corollario 4.2.2. *Il rivestimento ciclico ramificato ad n -fogli sul nodo torico $\mathbf{t}(k, h) = K(a, b, c, r)$, dove i parametri a, b, c, r sono stati determinati utilizzando l'algoritmo descritto nella proposizione precedente, è la varietà di Dunwoody $M(a, b, c, n, r, s)$, dove $s = -p_\sigma q_\sigma$ con $\sigma = (a, b, c, 1, r, 0)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.1.1 dobbiamo determinare solo il sesto parametro s della sestupla. Per l'esistenza del rivestimento è necessario che sia verificata la condizione $q_\sigma + sp_\sigma \equiv 0 \pmod{n}$ per ogni n , dove $\sigma = (a, b, c, 1, r, 0)$. Poiché $\mathbf{t}(k, h) \subset \mathbf{S}^3$, si ha $p_\sigma = -p = \pm 1$ e quindi basta scegliere $s = -p_\sigma q_\sigma$. \square

Come interessante applicazione abbiamo determinato esplicitamente i parametri associati ai nodi torici di tipo $\mathbf{t}(k, ck + 1)$ e $\mathbf{t}(k, ck - 1)$.

Corollario 4.2.3. (1) *Per ogni $c > 0$ e $k > 1$ si ha che il nodo torico $\mathbf{t}(k, ck + 1)$ è il nodo $K(1, k - 2, 2kc - 2c - k + 1, k)$.*

(2) *Per ogni $c, k > 1$ si ha che il nodo torico $\mathbf{t}(k, ck - 1)$ è il nodo $K(1, 2kc - 2c - k - 1, k - 2, 3k - 4)$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.5.1 si ha che $\mathbf{t}(k, ck + 1)$ è rappresentato dall'elemento $\psi = (\tau_l^{-c} \tau_m^{-1})^k \tau_l^{-1} t_\beta t_\alpha t_\beta$ mentre $\mathbf{t}(k, ck - 1)$ è rappresentato dall'elemento $\psi' = \tau_l^{1-c} (\tau_m^{-1} \tau_l^{-c})^{k-2} \tau_m^{-1} \tau_l^{1-c} \tau_m^{-1} \tau_l^{-1} t_\beta t_\alpha t_\beta$. Applicando l'algoritmo descritto nella Proposizione 4.2.1 agli elementi ψ e ψ' si ottiene l'enunciato. \square

Questo risultato è in accordo con quanto ottenuto in [2] utilizzando tecniche diverse. In particolare, in tale articolo è stata trovata la stessa quaterna di parametri nel caso dei nodi torici di tipo $\mathbf{t}(k, ck + 1)$, mentre nel caso dei nodi torici $\mathbf{t}(k, ck - 1)$ è stata trovata la quaterna di parametri $(1, k - 2, 2kc - 2c - k - 1, -3k + 4)$ che è in effetti equivalente a quella trovata nel Corollario 4.2.3, come mostra la seguente osservazione.

Osservazione 4.2.1. Gli (1, 1)-nodi $K(a, b, c, r)$ e $K(a, c, b, d - r)$ sono equivalenti. Infatti consideriamo il diagramma di Dunwoody $H(a, b, c, 1, r, 0)$ e consideriamo una simmetria di \mathbf{S}^2 rispetto al piano che interseca \mathbf{S}^2 nella circonferenza massima J passante per $\{P_1, P_2\}$ illustrata in Figura 4.18. In tal modo otteniamo il diagramma $H_{-1}(a, c, b, 1, -r, 0)$ che, tramite un movimento di Singer di tipo IIB^{-1} , ossia l'inverso di un Dehn twist lungo γ (vedi Appendice) è equivalente ad $H(a, c, b, 1, -r, 0)$. In Figura 4.18 è illustrata tale equivalenza nel caso di $K(1, 1, 2, 1)$.

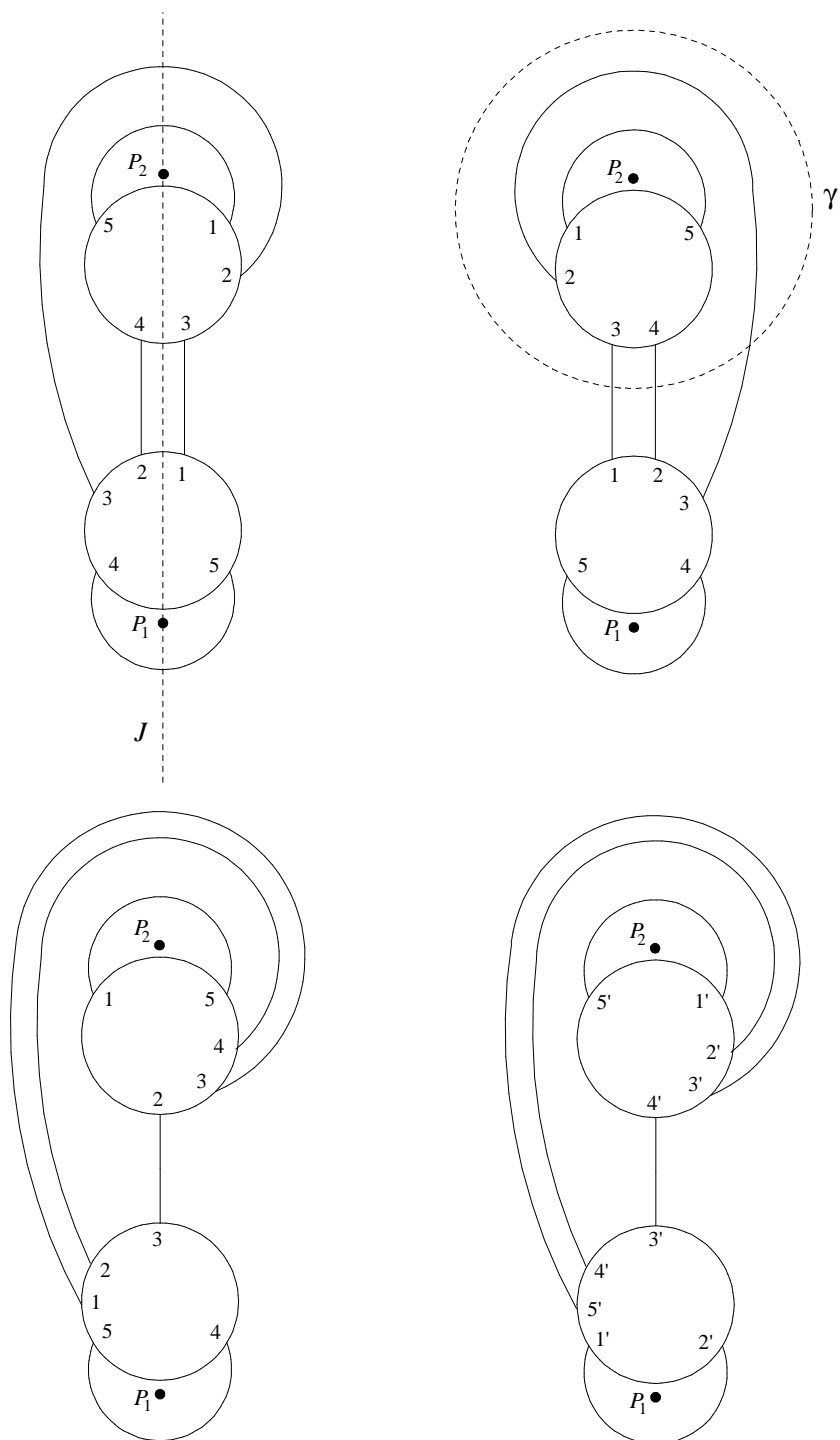


Figura 4.18: Equivalenza di $K(1, 1, 2, 1)$ e $K(1, 2, 1, 4)$.

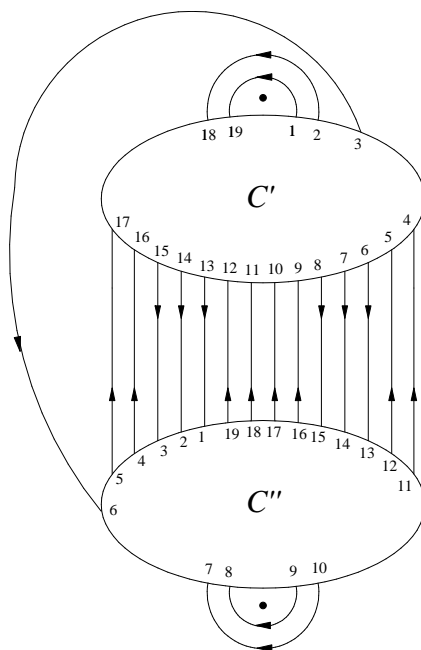


Figura 4.19: Presentazione di Dunwoody del nodo torico $\mathbf{t}(5,8)$.

Esempio 4.2.1. Consideriamo, per esempio, $\mathbf{t}(5,8)$. Per il Teorema 2.5.1 una presentazione standard del nodo torico $\mathbf{t}(5,8)$ è data da $\psi = \tau_l^{-1} \tau_m^{-1} \tau_l^{-1} (\tau_l^{-1} (\tau_m^{-1} \tau_l^{-1})^2)^2 t_\beta t_\alpha t_\beta$. Quindi, applicando l'algoritmo contenuto nella Proposizione 4.2.1, il nodo torico $\mathbf{t}(5,8)$ è il nodo $K(2, 1, 14, 11)$. Inoltre, osservando il diagramma illustrato in Figura 4.19, è facile verificare che $p_\sigma = -1$ e $q_\sigma = 5$. Quindi il rivestimento ciclico ad n -fogli ramificato su $\mathbf{t}(5,8)$ è la varietà di Dunwoody $H(2, 1, 14, n, 11, 5)$.

Appendice

Movimenti di Singer

In questa appendice descriviamo i movimenti di Singer utilizzati nella dimostrazione del Teorema 4.2.1, ossia i movimenti IB, IIB e IIA. Richiamiamo alcune notazioni. Dato il diagramma di Heegaard su T_g costituito dai sistemi di curve $\{c_i\}$ ed $\{e_i\}$ denoteremo, nel corrispondente diagramma di Heegaard aperto, con C'_i e C''_i le circonferenze canoniche corrispondenti a c_i e con E_i l'insieme di archi o la curva chiusa corrispondente ad e_i , per $i = 1, \dots, g$.

Movimento di Singer IB

Sia $G \subset \mathbf{S}^2$ una circonferenza tale che $G \cap C'_i = G \cap C''_i = \emptyset$, per $i = 1, \dots, n$ e tale che uno dei due dischi bordati da G in \mathbf{S}^2 contiene al suo interno una ed una sola circonferenza canonica, diciamo C'_k . Chiameremo D tale disco. Ora tagliamo \mathbf{S}^2 lungo G e poniamo $G' = \partial(\mathbf{S}^2 - \text{int}(D))$ e $G'' = \partial D$. Infine incolliamo D ad \mathbf{S}^2 identificando i punti corrispondenti di C'_k e C''_k . In tal modo, otteniamo un diagramma di Heegaard in cui la coppia di circonferenze canoniche C'_k e C''_k è stata sostituita dalla coppia di circonferenze canoniche G' e G'' .

Questo movimento permette di sostituire una curva c_i con un'altra ad essa isotopa. La stessa cosa ovviamente si può fare per le curve e_i , prendendo come circonferenze canoniche le circonferenze corrispondenti al taglio di T_g lungo e_i ed applicando questo movimento. In altre parole i sistemi di curve di un diagramma di Heegaard chiuso possono essere definiti a meno di isotopia.

Movimento di Singer di tipo IIB

Sia G una curva semplice chiusa tale che uno dei due dischi bordati da G in \mathbf{S}^2 contiene al suo interno una ed una sola circonferenza canonica. Il movimento di Singer di tipo IIB lungo la circonferenza G consiste nell'applicare

ad \mathbf{S}^2 un Dehn twist lungo G .

Movimento di Singer IIA

Sia $G \subset \mathbf{S}^2$ una curva semplice chiusa su \mathbf{S}^2 e sia G' il risultato di una piccola deformazione di G tale che $G \cap G' = \emptyset$. In altre parole G e G' hanno l'aspetto di due circonferenze concentriche distinte. Supponiamo inoltre che il disco D bordato da G' in \mathbf{S}^2 che contiene G contenga anche al suo interno una ed una sola coppia di circonferenze canoniche C'_k e C''_k corrispondenti alla stessa curva c_k . Sia $l(se^{i\theta})$ con $(s, \theta) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$ una parametrizzazione di D tale che $G' = l(2 \times [0, 2\pi])$ e $G = l(1 \times [0, 2\pi])$. Sia $\chi_G : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ l'applicazione definita su D da:

$$\chi_G(l(se^{i\theta})) = \begin{cases} l(se^{i(\theta+\pi)}) & \text{se } 0 \leq s \leq 1, \\ l(se^{i(\theta+s\pi)}) & \text{se } 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$

ed estesa tramite l'identità a tutto \mathbf{S}^2 . Il movimento di Singer di tipo IIA lungo la circonferenza G consiste nell'applicare χ_G ad \mathbf{S}^2 . Questo tipo di omeomorfismo è anche detto *semitwist* lungo G in quanto si ha che χ_G^2 è il Dehn twist lungo la curva $l(3/2 \times [0, 2\pi])$.

Bibliografia

- [1] J. W. ALEXANDER. Notes on Riemann spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **26** (1919), 339–342.
- [2] H. AYDIN, I. GULTEKIN e M. MULAZZANI. Torus knots and Dunwoody manifolds. *Preprint*.
- [3] P. BANDIERI, A. C. KIM e M. MULAZZANI. On the cyclic coverings of the knot 5_2 . *Proc. Edinb. Math. Soc.* **42** (1999), 575–587.
- [4] J. BIRMAN. Mapping class groups and their relationship to braid groups. *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 213–238.
- [5] J. BIRMAN. On braid groups. *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 41–72.
- [6] J. BIRMAN. *Braids, Links and Mapping Class Groups*. Ann. of Math. Stud. no. 82 (Princeton Univ. Press, 1975).
- [7] G. BURDE e H. ZIESCHANG. *Knots*. De Gruyter Stud. Math. no. 5 (de Gruyter, 1985).
- [8] A. CATTABRIGA e M. MULAZZANI. Strongly-cyclic branched coverings of $(1,1)$ -knots and cyclic presentations of groups. In corso di pubblicazione su: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, ArXiv: math. GT/0110042.
- [9] A. CATTABRIGA e M. MULAZZANI. $(1,1)$ -knots via the mapping class group of the twice punctured torus. In corso di pubblicazione su: *Adv. Geom.*, ArXiv: math. GT/0205138.
- [10] A. CAVICCHIOLI, F. HEGENBARTH e A. C. KIM. A geometric study of Sieradski groups. *Algebra Colloq.* **5** (1998), 203–217.

- [11] A. CAVICCHIOLI, F. HEGENBARTH e A. C. KIM. On cyclic branched coverings of torus knots. *J. Geom.* **64** (1999), 55–66.
- [12] M. DEHN. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.* **69** (1910), 137–168.
- [13] M. DEHN. Die Gruppe der Abbildungsklassen. *Acta Math.* **69** (1938), 135–206.
- [14] H. DOLL. A generalized bridge number for links in 3-manifold. *Math. Ann.* **294** (1992), 701–717.
- [15] M.J. DUNWOODY. Cyclic presentations and 3-manifolds. In: *Groups-Korea '94. Proceedings of the International Conference* (de Gruyter, 1995), 47–55.
- [16] R.H. FOX. Covering space with singularities. In: *Algebraic Geometry and Topology, a symposium in honour of S. Lefschetz* Princeton Math. Ser. no. 12 (Princeton Univ. Press, 1957), 243–257.
- [17] S. GERVAIS. Presentation and central extensions of mapping class groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 3097–3132.
- [18] S. GERVAIS. A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface. *Topology* **40** (2001), 703–725.
- [19] D. GABAI. Surgery on knots in solid tori. *Topology* **28** (1989), 1–6.
- [20] L. GRASSELLI e M. MULAZZANI. Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds. *Forum Math.* **13** (2001), 379–397.
- [21] P. HEEGAARD. Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhaeng. *Dissertation* (Copenhagen, 1898).
- [22] H. HELLING, A. C. KIM. e J. L. MENNICKE. A geometric study of Fibonacci groups. *J. Lie Theory* **8** (1998), 1-23.
- [23] J. HEMPEL. *3-manifolds*. Ann. of Math. Stud. no. 86 (Princeton Univ. Press, 1976).
- [24] H.M. HILDEN. Three-fold branched coverings of \mathbf{S}^3 . *Amer. J. Math.* **98** (1976), 989–997.

-
- [25] D. L. JOHNSON. *Topics in the theory of group presentations*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. no. 42 (Cambridge Univ. Press, 1980).
- [26] A. KAWAUCHI. *A Survey of Knot Theory* (Birkhäuser, 1996).
- [27] A. C. KIM. On the Fibonacci group and related topics. *Contemp. Math.* **184** (1995), 231–235.
- [28] A. C. KIM, Y. KIM e A. VESNIN. On a class of cyclically presented groups. In: *Groups-Korea '98. Proceedings of the International Conference* (de Gruyter, 2000), 211–220.
- [29] A. C. KIM, Y. KIM e A. VESNIN. The knot 5_2 and cyclically presented groups. *J. Korean Math. Soc.* **35** (1998), 961–980.
- [30] C. LABRUÈRE e L. PARIS. Presentations of the punctured mapping class groups in terms of Artin groups. *Algebr. Geom. Topol.* **1** (2001), 73–114.
- [31] W. B. R. LICKORISH. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 769–778.
- [32] W. B. R. LICKORISH. On the homeotopy group of a 2-manifold (Corrigendum). *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **62** (1966), 679–681.
- [33] S. LINS. *Gems, computers and attractor for 3-manifolds*. Ser. Knots Everything no. 5 (World Scientific, 1995).
- [34] C. MACLACHLAN e A. W. REID. Generalised Fibonacci manifolds. *Transform. Groups* **2** (1997), 165–182.
- [35] S. V. MATVEEV. Three-manifolds. Classical results. *J. Math. Sci.* **74** (1995), 834–860.
- [36] J. MINKUS. The branched cyclic coverings of 2 bridge knots and links. *Mem. Amer. Math. Soc.* **35** (1982), 1–68.
- [37] J. M. MONTESINOS. Three-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3 . *Q. J. Math.* **27** (1976), 85–94.
- [38] K. MORIMOTO e M. SAKUMA. On unknotting tunnels for knots. *Math. Ann.* **289** (1991), 143–167.

- [39] K. MORIMOTO, M. SAKUMA e Y. YOKOTA. Examples of tunnel number one knots which have the property ‘ $1+1=3$ ’. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **119** (1996), 113–118.
- [40] K. MORIMOTO, M. SAKUMA e Y. YOKOTA. Identifying tunnel number one knots. *J. Math. Soc. Japan* **48** (1996), 667–688.
- [41] K. MURASUGI. *Knot Theory and Its Applications* (Birkhäuser, 1996).
- [42] M. MULAZZANI. Cyclic presentation of groups and cyclic branched coverings of $(1, 1)$ -knots. *Bull. Korean Math. Soc.* **40** (2003), 101–108.
- [43] M. MULAZZANI e A. VESNIN. Generalized Takahashi manifolds. *Osaka J. Math.* **39** (2002), 705–721.
- [44] F. H. NORWOOD. Every two-generator knot is prime. *Proc. Amer. Math. Soc.* **86** (1982), 143–147.
- [45] J.R. PARKER e C. SERIES. The mapping class group of the twice punctured torus. In corso di pubblicazione su: *Proceedings of the conference “Groups: Combinatorial and Geometric Aspects”*(Bielefeld, 1999).
- [46] H. POINCARÉ. Analysis Situs *J. École Polytech. Paris* **1** (1895), 1–121.
- [47] V. V. PRASOLOV e A. B. SOSSINSKY. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Transl. Math. Monogr. no. 154 (Amer. Math. Soc., 1997).
- [48] M. SCHARLEMANN. Tunnel number one knots satisfy the Poenaru conjecture. *Topology Appl.* **18** (1984), 235–258.
- [49] H. SCHUBERT. Knoten mit zwei Brücken. *Math. Z.* **65** (1956), 133–170.
- [50] H. SEIFERT e W. THRELFALL. *A textbook of topology*. Pure Appl. Math. no. 89 (Academic Press, 1980).
- [51] J. SINGER. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.* **35** (1933), 88–111.
- [52] W. P. THURSTON. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 357–381.
- [53] A. VESNIN e A. C. KIM. The fractional Fibonacci groups and manifolds. *Siberian Math. J.* **39** (1988), 655–664.

-
- [54] B. WAJNRYB. A simple presentation for the Mapping Class Group of an orientable surface. *Israel J. Math.* **45** (1956), 679–681.
- [55] Y.-Q. WU. ∂ -reducing Dehn surgeries and 1-bridge knots. *Math. Ann.* **295** (1993), 319–331.
- [56] Y. YOKODA. On quantum $SU(2)$ invariants and generalized bridge numbers of knots. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **117** (1995), 545–557.
- [57] H. J. ZASSENHAUS. *The theory of groups* (Chelsea Pub. Co., 1958).

Indice analitico

- (g, b) -decomposizione, 15
- Circonferenza canonica, 12
- Corpo di manici, 10
- Curva meridiana, 10
- Decomposizione di Heegaard, 10
- Dehn twist, 29
- Diagramma di Heegaard, 11
 - aperto, 12
- Disco
 - canonico, 12
 - meridiano, 10
 - di un nodo, 14
- Equivalenza
 - di nodi, 13
 - di rivestimenti ramificati , 26
 - forte di nodi, 13
- Genere di Heegaard, 11
- Gruppo di trecce, 28
- Gruppo fondamentale, 17
- Ideale
 - di Alexander, 18
 - elementare, 18
- Immagine speculare, 13
- Indice di ramificazione, 25
- Insieme
 - di archi banale, 15
 - di ramificazione, 26
 - pseudo-singolare, 26
 - singolare, 26
- Mapping class group, 28
 - puntato, 28
 - puro puntato, 28
- Matrice di presentazione, 18
- Meridiano
 - dell'insieme di ramificazione , 27
 - di un nodo, 14
 - standard del toro, 23
- Modulo di Alexander , 18
- Monodromia, 26
- Nodo, 13
 - anferico, 13
 - banale, 13
 - di tipo $(1, 1)$, 36
 - di tipo (g, b) , 16
 - invertibile, 13
 - primo, 14
 - torico, 23
- Numero
 - di ponti, 15
 - di genere g , 15
 - di tunnel, 16
- Parallelo standard del toro, 23
- Polinomio
 - associato alla presentazione ciclica, 50

- di Alexander, 18
- Presentazione
 - a b ponti di un nodo, 14
 - ciclica, 49
- Punto
 - pseudo-singolare, 26
 - singolare, 25, 26
- Puntura, 28
- Rappresentazione standard, 43
- Rivestimento
 - non ramificato associato, 26
 - ramificato, 25
 - abeliano, 27
 - ad n -fogli, 26
 - ciclico, 27
 - fortemente ciclico, 50
 - regolare, 26
 - universale abeliano, 17
- Semitwist, 86
- Sestupla
 - ammissibile, 61
 - banale, 61
- Simboli di Conway, 22
- Somma connessa di nodi, 14
- Tunnel, 16
 - unknotting, 17
- Unknotting system, 17
- Varietà
 - di Dunwoody, 61
 - propriamente immersa, 10