

PRODOTTI SCALARI

Corso di Geometria

1) Si consideri il prodotto scalare su \mathbb{R}^3 definito da

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

- a) Dati i vettori $v = (1, 1, 1)$ e $w = (0, 1, 0)$, si calcoli la norma di v , la norma di w e l'angolo tra essi compreso.
 - b) Si calcoli una base ortonormale per tale prodotto scalare.
 - c) Posto $U = L(v, w)$, si calcoli una rappresentazione cartesiana per ${}^{\perp}U$.
- 2) In \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio $W = L((1, 1, 1), (2, 1, 0))$.
- a) Si trovi una base ortogonale per W .
 - b) Si trovi una rappresentazione cartesiana e una base per ${}^{\perp}W$.
 - c) Si trovi la proiezione ortogonale del vettore $(0, 0, -1)$ su W e su ${}^{\perp}W$.
- 3) In \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio

$$W : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Si trovi una base per W e una per ${}^{\perp}W$.
 - b) Si trovi una base ortonormale per W e una rappresentazione parametrica per ${}^{\perp}W$.
- 4) In \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard, si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (-x + y, \lambda^2x - y, \lambda z)$
- a) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T è ortogonale.
 - b) Si dica per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T è un simmetrico.

c) Fissato $\lambda = 1$ si trovi una base spettrale ortonormale per T .

5) In \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare standard, si calcoli

a) il prodotto vettoriale di $(1, 1, 1)$ e $(4, -1, 0)$.

b) il prodotto misto di $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(2, 1, -1)$.