

FORME BILINEARI SIMMETRICHE E CONICHE

Corso di Geometria

1) Calcolare il rango, la segnatura e la forma polare della forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2xz + yz.$$

2) Calcolare la forma quadratica, il rango e la segnatura della forma bilineare simmetrica $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi((x, y, z, t), (x', y', z', t')) = -xx' + 2zz' + tt' - \frac{3}{2}xz' - \frac{3}{2}x'z - yz' - y'z + \frac{1}{2}zt' + \frac{1}{2}z't.$$

3) Data la matrice simmetrica a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

- si calcoli per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita positiva.
- si calcoli per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice A è definita negativa.
- fissato $\lambda = 0$, si calcoli il rango, la segnatura e la forma canonica per congruenza di A .

4) Classificare e disegnare le seguenti coniche

- $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$.
- $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 10 = 0$.
- $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 10y - 3 = 0$.

5) Sia data la famiglia di coniche di equazione

$$x^2 + y^2 + 4\gamma xy - 6\gamma y = 0.$$

a) Si classifichino le coniche al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) Si trovi il centro ed un asse della conica ottenuta ponendo $\gamma = 4$.