1 Sistemi lineari: definizioni iniziali

Un'*equazione lineare* a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è una "espressione" del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$. Le indeterminate $x_1, \ldots, x_n$ sono dette le *incognite* o *variabili*, gli scalari $a_1, \ldots, a_n$ sono detti *coefficienti* e b è detto *termine noto* dell'equazione.

Un *sistema lineare* S di m equazion in n incognite a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è una m-pla di equazioni lineari a coeffienti in $\mathbb{K}$, nelle stesse n incognite $x_1, \ldots, x_n$

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{1}$$

Tratteremo i sistemi lineari come particolari equazioni matriciali. Il sistema (1) si può scrivere come

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

è detta matrice dei *coefficienti* o *incompleta* del sistema, mentre

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sono dette rispettivamente n-pla delle incognite e m-pla termini noti.

Chiaramente un sistema lineare è univocamente determinato dalla matrice dei coefficienti e dalla m-pla dei termini noti. Quindi, equivalentemente, possiamo definire un sistema lineare S di m equazioni in n incognite a coefficienti in $\mathbb{K}$ come una coppia $S = (A, \mathbf{b})$ dove $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Con la notazione $(A|\mathbf{b})$ oppure C si indica la *matrice completa* associata al sistema

$$(A|\mathbf{b}) = C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

2 Soluzioni di un sistema lineare

Una *soluzione* di un sistema lineare $S = (A, \mathbf{b})$ è una n-pla $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$A \cdot \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}.$$

In altre parole è una soluzione comune a tutte le equazioni del sistema. Indichiamo con $\mathrm{Sol}(S)$ l'insieme di tutte le soluzioni di un sistema lineare S. Chiaramente $\mathrm{Sol}(S) \subset \mathbb{K}^n$ dove n è il numero di varibili di S.

Un sistema si dice *possibile* (o *compatibile*) se ammette soluzioni, *impossibile* (o *incompatibile*) altrimenti. Un sistema possibile si dice *determinato* se ha una sola soluzione, *indeterminato* se ne ha più di una.

Due sistemi lineari S e S' si dicono equivalenti se $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(S')$.

2.1 Sistemi omogenei

Un sistema lineare $S = (A, \mathbf{0})$ avente la m-pla nulla come m-pla dei termini noti si dice *omogeneo*.

Proposizione 2.1. *Un sistema lineare è omogeneo se e solo se ammette come soluzione la n-pla nulla* $(0, \ldots, 0)$.

Quindi un sistema omogeneo è sempre compatibile e la n-pla nulla è detta soluzione *banale* del sistema.

Dato un sistema lineare $S = (A, \mathbf{b})$, il sistema omogeneo associato ad S è il sistema omogeneo $S_0 = (A, \mathbf{0})$, ottenuto sostituendo la m-pla nulla alla m-pla dei termini noti.

Teorema 2.1. *Sia S un sistema lineare compatibile. Si ha*

$$Sol(S) = \{u + w \mid w \in \mathrm{Sol}(S_0)\},$$

dove u è una soluzione particolare qualsiasi di S.

2.2 Sistemi di Cramer

Un sistema lineare $S = (A, \mathbf{b})$ si dice *normale* o di *Cramer* di ordine n se $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. In altre parole un sistema di Cramer di ordine n è un sistema con n equazioni e n incognite la cui matrice dei coefficienti ha determinante diverso da zero.

Teorema 2.2 (di Cramer)**.** *Un sistema di Cramer $S = (A, \mathbf{b})$ ammette una e una sola soluzione.*

Dimostrazione.
Esiste A^{-1}, quindi moltiplicando a sinistra ambo i membri di (2) per A^{-1}, si ottiene

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

□

Dalla dimostrazione otteniamo un metodo per la risoluzione di un sistema di Cramer: moltiplicare per A^{-1} la colonna dei termini noti. Purtroppo tale metodo è molto oneroso dal punto di vista computazionale perché è necessario il calcolo di A^{-1}. Si può ovviare seguendo il seguente procedimento.

Teorema 2.3. *Sia $S = (A, \mathbf{b})$ un sistema di Cramer allora la soluzione $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ del sistema è data dalla seguente formula (di Cramer)*

$$\overline{x}_i = (\det D_i) \cdot (\det A)^{-1} \qquad\qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove D_i è la matrice ottenuta da A sostituendo $\mathbf{b}$ alla colonna i-esima.

2.3 Algoritmo di Gauss

Un sistema lineare si dice *ridotto* se la matrice completa associata al sistema è ridotta a gradini per righe e priva di righe nulle.

I sistemi lineari ridotti sono più semplici da risolvere: vediamo come. Sia $S = (A, \mathbf{b})$ un sistema lineare ridotto. Si noti che la matrice completa C associata al sistema contiene un pivot su ogni riga. Innanzitutto è facile verificare che S è risolubile se e solo se il pivot sull'ultima riga NON sta sulla colonna dei termini noti. In tal caso, se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, le soluzioni del sistema dipendono da $n - m$ parametri o variabili libere corrispondenti alle colonne di A che NON contengono pivot. Le incognite corrispondenti alle colonne di A che contengono i pivot sono dette vincolate e possono essere ricavate in funzione dei parametri mediante la cosiddetta "back-sostitution": partendo dall'ultima equazione e risalendo, da ogni equazione si ricava la variabile corrispondente alla colonna contenente il pivot in funzione dei parametri e delle variabili ricavate nei passi precedenti.

Sia ora S un sistema lineare qualsiasi. Vale il seguente teorema.

Teorema 2.4. *Le seguenti operazioni non cambiano l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare S a coefficienti in $\mathbb{K}$*

1. *scambiare due equazioni;*
2. *sostituire all'equazione $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ l'equazione $\lambda\,(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = \lambda b_i$ con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$;*
3. *sostituire all'equazione $a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$ l'equazione $(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + b_j$ (con $i \neq j$).*
4. *rimuovere l'equazione $0 = 0$.*

Corollario 2.1. *Dato un sistema lineare $S = (A, \mathbf{b})$ esiste sempre un sistema lineare $S' = (A', \mathbf{b}')$ ridotto ed equivalente ad S.*

Dimostrazione.
Sia $C = (A|\mathbf{b})$ la matrice completa. Sia $C' = (A'|\mathbf{b}')$ la matrice ottenuta eliminando le eventuali righe nulle da una qualsiasi matrice ridotta a gradini per righe ottenuta da C mediante operazioni di riga. Per il teorema 2.4 il sistema $S' = (A', \mathbf{b}')$ è equivalente ad S. $\square$

Quindi un metodo, detto *algoritmo di Gauss*, per determinare le soluzioni di un sistema lineare qualsiasi S consiste nel:

1. determinare un sistema ridotto S' equivalente ad S, riducendo a gradini per righe la matrice completa associata ad S ed eliminando le eventuali righe nulle;
2. se S' risulta risolubile, risolverlo mediante back-sostitution.

Si osservi che se in un qualsiasi passaggio della riduzione a gradini per righe della matrice completa compare una riga del tipo $(0, \cdots, 0, a)$ con $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, il sistema risulta impossibile.