SIMILITUDINE-AUTOVALORI: soluzioni

Corso di Geometria

1)

a) Polinomio caratteristico: $p_A(t) = t^2 - 3t + 2$. Autovalori: $1, 2$. La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ha due autovalori distinti quindi è diagonalizzabile per similitudine: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Polinomio caratteristico: $p_A(t) = t(t-2)(t+2)$. Autovalori: $0, 2, -2$. La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ha tre autovalori distinti quindi è diagonalizzabile per similitudine: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Polinomio caratteristico: $p_A(t) = (t-1)(t^2 - 6t + 13)$. Autovalori: 1. La matrice A ha un unico autovalore cone $m_a(1) = m_g(1) = 1$ quindi non è diagonalizzabile per similitudine.

d) Polinomio caratteristico: $p_A(t) = t(t+1)^2(t-3)$. Autovalori: $0, -1, 3$. Si ha $m_g(0) = m_a(0) = 1$, $m_g(3) = m_a(3) = 1$, $m_g(-1) = 4 - \rho(-I_4 - A) = 2$, da cui $m_g(0) + m_g(-1) + m_g(3) = 4$ quindi A è diagonalizzabile per similitudine: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Polinomio caratteristico: $p_A(t) = (t-4)(t-3)^3$. Autovalori: $3, 4$. Si ha $m_g(3) = 4 - \rho(3I_4 - A) = 2 < 3 = m_a(3)$, quindi A non è diagonalizzabile per similitudine.

2)

a) Polinomio caratteristico: $p_T(t) = t^2 + 6$. L'endomorfismo T non ha autovalori quindi non è semplice.

b) Polinomio caratteristico: $p_T(t) = t(t-3)(t+1)$. Autovalori: $= 0, 3, -1$. L'endomorfismo T ha tre autovalori distinti quindi è semplice. Una rappresentazione cartesiana minimale degli autospazi è:

$$U_0 : \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} , \quad U_3 : \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} , \quad U_{-1} : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} .$$

Una base spettrale è $\mathcal{B}^S = \{(0, -2, 1), (3, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$

c) Polinomio caratteristico: $p_T(t) = t(t + 2)^2$. Autovalori: $= 0, -2$. Una rappresentazione cartesiana minimale degli autospazi rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$ è:

$$U_0 : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad U_{-2} : \ y + z = 0.$$

Una base spettrale è $\mathcal{B}^S = \{(-1, 0, -1), (1, 2, 1), (1, 1, 0)\}$

d) Polinomio caratteristico: $p_T(t) = t(t - 1)^3$. Autovalori: $= 0, 1$. Una rappresentazione cartesiana degli autospazi rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ è:}$$

$$U_0 : \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} , \quad U_1 : \{ \ y - z = 0 \ .$$

L'endomorfismo T ha tre autovalori distinti quindi è semplice. Una base spettrale è

$$\mathcal{B}^S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e) Polinomio caratteristico: $p_T(t) = (t-2)t^3$. Autovalori: $= 2, 0$. Una rappresentazione cartesiana degli autospazi rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$ è

$$U_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} , \quad U_0 : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} .$$

Si ha $m_g(0) = \dim(U_0) = 1 < 3 = m_a(0)$, quindi l'endomorfismo non è semplice.