PRODOTTI SCALARI: soluzioni

Corso di Geometria

1)

a) $\|v\| = \sqrt{3}$, $\|w\| = \sqrt{3}$, $\widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$.

b) Mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ottiene che una base ortonormale rispetto all'assegnato prodotto scalare è $\mathcal{C} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{6}\right)\right)$. Dato che v e w sono ortogonali tra loro, un'altra base ortonormale è $\mathcal{C}' = \left((\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{6})\right)$ ottenuta aggiungendo ai vettori v e w un vettore ortogonale a entrambi e dividendo per le rispettive norme.

c) Imponendo $\langle (x_1, x_2, x_3), (1, 1, 1)\rangle = 0$ e $\langle (x_1, x_2, x_3), (0, 1, 0)\rangle = 0$, si ottiene ${}^{\perp}U$: $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$. Altrimenti, dato che $v \equiv_{\mathcal{C}} (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{15}}{5})$ e $w \equiv_{\mathcal{C}} (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}, 0)$, una rappresentazione cartesiana per ${}^{\perp}U$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ è $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{10}}{10}x_2 + \frac{2\sqrt{15}}{5}x_3 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}x_2 = 0 \end{cases}$. In modo analogo, una rappresentazione cartesiana rispetto alla base $\mathcal{C}'$ è $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

2)

a) Una base ortogonale per W è $((1, 1, 1), (1, 0, -1))$

b) Una rappresentazione cartesiana per ${}^{\perp}W$ è $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$; una base per ${}^{\perp}W$ è $((1, -2, 1))$.

c) $p_{{}^{\perp}W}((0, 0, -1)) = \frac{\langle (0,0,-1),(1,-2,1)\rangle}{\langle (1,-2,1),(1,-2,1)\rangle}(1, -2, 1) = -\frac{1}{6}(1, -2, 1) = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ e $p_W((0, 0, -1)) = (0, 0, -1) - p_{{}^{\perp}W}((0, 0, -1)) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{6})$.

3)

a) Una base per W è $((-3,-1,2,4))$; una base ${}^{\perp}W$ è $((1,3,1,1),(1,1,0,1),(0,0,2,-1))$.

b) Una base ortonormale per W è $((-\frac{\sqrt{30}}{10}, -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{2\sqrt{30}}{15}))$; una rappresentazione parametrica per ${}^{\perp}W$ è $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = 3\alpha + \beta \\ x_3 = \alpha + 2\gamma \\ x_4 = \alpha + \beta - \gamma \end{cases}$.

4) La matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Dato che la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, T è ortogonale se e solo se A è ortogonale e cioè se ${}^tA \cdot A = A \cdot {}^tA = I_3$, condizione che non è verificata per nessun valore di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Dato che la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, T è simmetrica se e solo se A è simmetrica e cioè se ${}^tA = A$, condizione che è verificata per $\lambda = \pm 1$.

c) Gli autovalori sono $0, -2, 1$. Una base di U_0 è $((1,1,0))$; una base di U_{-2} è $((1,-1,0))$; una base di U_1 è $((0,0,1))$. Una base spettrale ortonormale per T è $((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0,0,1))$.

5)

a) $(1,1,1) \wedge (4,-1,0) = (1,4,-5)$.

b) $\langle (1,1,0), (0,1,1) \wedge (2,1,-1) \rangle = 0$.