FORME BILINEARI SIMMETRICHE E CONICHE: soluzioni

Corso di Geometria

1) Si ha $\varrho(q) = 3$ e $\sigma(q) = (1, 2)$. La forma polare è $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - 2yy' + xz' + x'z + \frac{1}{2}yz' + \frac{1}{2}y'z$.

2) Si ha $\varrho(\varphi) = 4$, $\sigma(\varphi) = (2, 2)$. La forma quadratica associata a φ è $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da $q(x, y, z, t) = -x^2 + 2z^2 + t^2 - 3xz - 2yz + zt$.

3) a) La matrice è definita positiva per $\lambda > 5 + \sqrt{26}$.

b) La matrice non è mai definita negativa.

c) Si ha $\varrho(A) = 4$, $\sigma(A) = (3, 1)$. La forma canonica per congruenza è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) a) La conica è una parabola. L'asse ha equazione $\sqrt{3}x - y = 0$, il vertice è il punto $V = (0, 0)$. La direttrice è parallela alla retta $x + \sqrt{3}y = 0$ e la conica passa per il punto $P = (0, -2\sqrt{3})$. La forma canonica per congruenza è $Y = \pm X^2$.

b) La conica è un iperbole. Il centro è il punto $C = (0, 0)$. Gli assi sono le rette di equazione $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$. I vertici sono i punti $V_1 = (\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5})$ e $V_2 = (-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{3\sqrt{10}}{5})$. L'iperbole passa per i punti $(0, \pm\sqrt{5})$. La forma canonica per congruenza è $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$.

c) La conica è un ellisse non vuota. Il centro è il punto $C = (-1, 2)$. Gli assi sono le rette di equazione $x - y + 3 = 0$ e $x + y - 1 = 0$. I vertici sono i punti $V_1 = (\frac{-2+\sqrt{7}}{2}, \frac{4+\sqrt{7}}{2})$, $V_2 = (\frac{-2-\sqrt{7}}{2}, \frac{4-\sqrt{7}}{2})$, $V_3 = (\frac{-2+\sqrt{14}}{2}, \frac{4-\sqrt{14}}{2})$ e $V_4 = (\frac{-2-\sqrt{14}}{2}, \frac{4+\sqrt{14}}{2})$. La forma canonica per congruenza è $\frac{X^2}{7} + \frac{2Y^2}{7} = 1$.

5) a) Si ha $\det A = -9\gamma^2$ e $\det(M_{00}) = 1 - 4\gamma^2$ quindi: per $\gamma = 0$ la conica è degenere; per $\gamma = \pm\frac{1}{2}$ la conica è una parabola; per $-\frac{1}{2} < \gamma < 0$ oppure $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ la conica è un ellisse non vuota; per $\gamma < -\frac{1}{2}$ oppure $\gamma > \frac{1}{2}$ la conica è un iperbole.

b) Per $\gamma = 4$ la conica è un iperbole. Il centro è il punto $C = (\frac{32}{21}, -\frac{4}{21})$. Gli autovalori di M_{00} sono $\lambda = -7$ e $\lambda = 9$. Un autovettore relativo all'autovalore -7 è $(-1, 1)$, quindi un asse dell'iperbole è la retta di equazione $7x - 7y - 12 = 0$.