SPAZI VETTORIALI

Corso di Geometria

1) Verificare, dandone una dimostrazione, se il seguente sottoinsieme W è oppure no un sottospazio vettoriale di V con le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare. In caso affermativo trovare, se possibile, un insieme di generatori finito per W.

a) $W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) = 1\}$, $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dove $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_i^i$ è detta *traccia* di A.

b) $W = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\}$, $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dove $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è detto insieme delle *matrici antisimmetriche* di ordine n.

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

d) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = x^2\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

e) $W = \{c\,(2, 1, 0) \mid c \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

f) $W = \{c\,(2, 1, 0) \mid c \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}^3$.

g) $W = \{f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 3\}$, $V = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

h) $W = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p \text{ ha termine noto uguale a } 0\}$, $V = \mathbb{K}[t]$.

2) Dire se il seguente sottoinsieme X dello spazio vettoriale V è linearmente indipendente oppure no e calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $\mathbf{L}(X)$ da esso generato. Inoltre nel caso in cui sia linearmente indipendente completarlo ad una base per V, mentre in caso contrario esprimere uno dei suoi elementi come combinazione lineare degli altri:

a) $V = \mathbb{R}^3 \quad X = \{(3, 2, 1), (1, 4, -3), (-1, -1, 0)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^5 \quad X = \{(2, 0, -1, 0, 0), (1, 1, 1, -2, 0), (3, 1, 1, 1, 0)\}$.

c) $V = \mathbb{R}^4 \quad X = \{(1, 2, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

d) $V = \mathbb{R}^4 \quad X = \{(0, 2, 1, -4), (0, 1, -2, -4), (0, 2, 6, 0)\}$.

e) $V=\mathbb{R}^3 \quad X=\{(0,5,7),(-3,4,6),(3,6,8),(3,1,1)\}$.

3) Calcolare le coordinate del vettore $v \in V$ rispetto all1a base ordinata $\mathcal{B}$.

a) $v=(2,1,0,-2)\in\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}=((1,0,0,-1),(1,0,2,1),(1,1,0,-1),(0,0,-2,1))$.

b) $v=3-2t+t^2\in\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$, $\mathcal{B}=(1,t,t^2,t^3)$.

c) $v=3-2t+t^2\in\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$, $\mathcal{B}=(2,t,1+t^2,t^3)$.

d) $v=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

e) $v=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\-3&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

f) $v=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

4) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$\begin{aligned}U &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y=0\},\\ W &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2z+y=0\},\\ W' &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ 2x-2y=0\}.\end{aligned}$$

Calcolare una base per $U\cap W$, $U\cap W'$, $W\cap W'$, $U\cap W\cap W'$, $U+W$, $U+W'$, $W+W'$, $U+W+W'$ e dire in quali casi la somma è diretta.

5) Si determini una rappresentazione parametrica minimale e una cartesiana minimale per il sottospazio W dello spazio vettoriale V rispetto alla base $\mathcal{B}$.

a) $W=\mathbf{L}((1,1,1),(2,1,1),(4,2,2))\subset\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

b) $W=\mathbf{L}(1,t,1+t)\subset\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$, $\mathcal{B}=(1,t,t^2,t^3)$.

c) $W=\mathbf{L}\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\right)\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

6) Siano A,B,C le matrici definite nell'esercizio **1)** del foglio di Esercizi **MATRICI E SISTEMI**. Si calcoli il rango delle matrici A, B, C, AC, BA, CB.