SPAZI VETTORIALI: soluzioni

Corso di Geometria

1)

a) W non è un sottospazio vettoriale. Ad esempio si osservi che non contiene la matrice nulla che ha chiaramente traccia uguale a 0.

b) $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale infatti: $\forall A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ e $\forall a \in \mathbb{K}$, per la Prop. 3.4, si ha ${}^t(A+B) =^t A +^t B = -A - B = -(A+B)$ e ${}^t(aA) = a^tA = a(-A) = -(aA)$. Un insieme di generatori finito per $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è $\{F^i_j \mid i, j = 1, \ldots, n, i < j\}$, dove F^j_i è la matrice che ha tutti gli elementi uguali a 0 tranne quello di posto ij che è uguale a 1 e quello di posto ji che è uguale a -1.

c) W non è un sottospazio vettoriale. Ad esempio $(1,1,1) \in W$, ma $-1(1,1,1) = (-1,-1,-1) \notin W$, quindi W non è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

d) W non è un sottospazio vettoriale. Ad esempio $(1,1,0,0), (2,4,0,0) \in W$, ma $(1,1,0,0)+(2,4,0,0) = (3,5,0,0) \notin W$, quindi W non è chiuso rispetto alla somma.

e) $W = \mathbf{L}((2,1,0))$ e quindi è un sottospazio vettoriale per la Prop. 4.3. Un insieme di generatori finito è $\{(2,1,0)\}$.

f) W non è un sottospazio vettoriale. Ad esempio $(2,1,0) \in W$, ma $i(2,1,0) \notin W$ quindi W non è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

g) W è non è un sottospazio vettoriale. Ad esempio non contiene il vettore nullo di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che è la funzione costante uguale a 0.

h) W è un sottospazio vettoriale. Infatti $\forall p, q \in \mathbb{K}[t]$ e $\forall a \in \mathbb{K}$, per la definizione di somma di polinomi, il termine noto di $p+q$ è $p_0 + q_0 = 0 + 0 = 0$, dove p_0 e q_0 sono il termine noto di, rispettivamente p e q. Analogamente, utilizzando la definizione di prodotto di uno scalare per un polinomio, il termine noto di ap è $ap_0 = a0 = 0$. W non è finitamente generato (la dimostrazione è analoga a quella vista per $\mathbb{K}[t]$).

2)

a) I vettori sono linearmente dipendenti, $\dim(\mathbf{L}(X)) = 2$ e si ha $(1, 4, -3) = -3(3, 2, 1) - 10(-1, -1, 0)$.

b) I vettori sono linearmente indipendenti, $\dim(\mathbf{L}(X)) = 3$ e una base per V è $\{(2, 0, -1, 0, 0), (1, 1, 1, -2, 0), (3, 1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

c) I vettori sono linearmente indipendenti, $\dim(\mathbf{L}(X)) = 3$ e una base per V è $\{(1, 2, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}$.

d) I vettori sono linearmente dipendenti, $\dim(\mathbf{L}(X)) = 2$ e si ha $(0, 2, 6, 0) = 2(0, 2, 1, -4) - 2(0, 1, -2, -4)$.

e) I vettori sono linearmente dipendenti, $\dim(\mathbf{L}(X)) = 2$ e si ha $(0, 5, 7) = (-3, 4, 6) + (3, 1, 1)$.

3)

a) $v \equiv_{\mathcal{B}} (1, 0, 1, 0)$.

b) $v \equiv_{\mathcal{B}} (3, -2, 1, 0)$

c) $v \equiv_{\mathcal{B}} (1, -2, 1, 0)$

d) $v \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 5, 0, 4)$

e) $v \equiv_{\mathcal{B}} (1, 2, 1, 4)$

f) $v \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 5, 4)$

4) Una base per $U \cap W$ è $\{(2, 2, -1)\}$. Una base per $U \cap W' = W'$ è $\{(-1, -1, 2)\}$. Una base per $W \cap W' = \{(0, 0, 0)\}$ è $\emptyset$. Di conseguenza anche $U \cap W \cap W' = \{(0, 0, 0)\}$ quindi una base è $\emptyset$.
Una base per $U + W = \mathbb{R}^3$ è $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Una base per $U + W' = U$ è $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Una base per $W + W' = \mathbb{R}^3$ è $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Di conseguenza anche $U + W + W' = \mathbb{R}^3$ e quindi una base è $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. L'unica somma diretta è $W \oplus W'$.

5)

a) $W: \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad W: \; y - z = 0\ .$

b) $W: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad W: \begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases} .$

c) $W: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ t = \alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad W: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} .$

6) $\rho(A) = 4$, $\rho(B) = 3$, $\rho(C) = 2$, $\rho(AC) = 2$, $\rho(BA) = 3$, $\rho(CB) = 2$.