

Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
TESI IN GEOMETRIA

Coomologia di De Rham

Tesi di Laurea di:

Alessia Cattabriga

Relatore:

Prof. Angelo Vistoli

Anno Accademico 1998/1999

Indice

Introduzione pag. 5

Capitolo 1 - FIBRATI VETTORIALI

- 1.1 *Definizioni iniziali* pag. 11
- 1.2 *Operazioni tra fibrati vettoriali* pag. 21
- 1.3 *Sezioni* pag. 26
- 1.4 *Metriche e orientazioni* pag. 31

Capitolo 2 - COOMOLOGIA DI DE RHAM

- 2.1 *Richiami algebrici* pag. 40
- 2.2 *Complesso di De Rham* pag. 45
- 2.3 *Successione di Mayer-Vietoris* pag. 56

Capitolo 3 - COOMOLOGIA A SUPPORTO COMPATTO E DUALITÀ DI POINCARÉ

- 3.1 *Coomologia a supporto compatto* pag. 78
- 3.2 *Dualità di Poincaré* pag. 85
- 3.3 *Coomologia di un fibrato vettoriale* pag. 94

Capitolo 4 - ISOMORFISMO DI THOM E CLASSE DI EULERO

- 4.1 *Isomorfismo di Thom* pag. 101
- 4.2 *Dualità di Poincaré e classe di Thom* pag. 112
- 4.3 *Classe di Eulero* pag. 117

Bibliografia pag. 141

Introduzione

Nel 1895 Poincaré dà, per la prima volta, la definizione di omologia. È una definizione molto diversa da quelle attuali, più legata ad un'intuizione geometrica che non ad una costruzione algebrica, ma rappresenta il punto di partenza di un ramo fondamentale della matematica: la topologia algebrica. La strada aperta da Poincaré venne poi percorsa e ampliata da molti altri matematici: si tentò di formalizzare e dimostrare rigorosamente le intuizioni di Poincaré, ma per farlo mancavano ancora gli strumenti necessari. Furono essenzialmente Browner e Alexander che li idearono e Lefschetz li completò con un contributo essenziale. Fin da subito fu chiara la potenza e la vastità delle applicazioni dell'omologia: nel 1911 Browner dimostrò il famoso teorema del punto fisso e nel 1925 Lefschetz dimostrò un teorema che lega l'omologia di uno spazio X al numero di punti fissi di un'applicazione continua $f : X \rightarrow X$. Fu in questo periodo che si fecero numerosi sforzi nel tentativo di generalizzare la definizione di omologia ad una classe più ampia di spazi. Queste generalizzazioni vennero accompagnate dalla nascita di nuove tecniche algebriche che intervenivano nei ragionamenti legati alle nuove teorie omologiche, ma che eliminando l'origine topologica per cui venivano utilizzate, ne conservavano solo la struttura algebrica. Queste tecniche si rivelarono adattabili a molti altri settori della matematica, e condussero, ad esempio, alle definizioni, codificate da Eilenberg e MacLane, di categoria e funtore. D'altra parte la teoria omologica assunse un aspetto più algebrico avvicinandosi nelle definizioni e nel linguaggio a quella attuale. La nozione di complesso di catene che è alla base dell'attuale concetto di omologia fu introdotto per la prima volta da W. Mayer nel 1929.

Già molto tempo prima, Riemann nei suoi studi sugli integrali, aveva definito per una 1-forma differenziale ω su una superficie di Riemann S , tale che $d\omega = 0$, il periodo di ω come il valore dell'integrale $\int_C \omega$ lungo una curva chiusa C su S , dimostrando che l'insieme dei periodi è un \mathbb{Z} -modulo libero avente per base il valore dell'integrale lungo gli 1-cicli che formano una base del gruppo di omologia di grado 1 di S a coefficienti in \mathbb{Z} . Betti enunciò un risultato analogo per le $(n-1)$ -forme differenziali su una varietà di dimensione n , poi Poincaré, nelle sue memorie del 1895, diede, senza dimostrazione, un enunciato generale per le p -forme con $1 \leq p \leq n$. Ma la questione che porterà poi alla nascita della coomologia e in particolare della coomologia di

De Rham venne affrontata da *E. Cartan* intorno al 1927. Il problema che si pose Cartan era quello di sapere quando, su una varietà \mathcal{C}^∞ , compatta, orientata e di dimensione n , una p -forma differenziale ω chiusa (cioè tale che $d\omega = 0$), è esatta (cioè esiste una $(p - 1)$ -forma α tale che $\omega = d\alpha$). Egli suppose la varietà triangolabile e definì una \mathbb{Z} -forma bilineare

$$(\omega, c) \mapsto \int_c \omega$$

sulle p -forme chiuse ω e i p -cicli c della triangolazione. Segue dalla formula di Stokes che $\int_c \omega = 0$ se ω è esatta o se c è un bordo. Cartan nel 1929 fece la seguente congettura:

1. se $\int_c \omega = 0$ per tutti i p -cicli, ω è esatta;
2. se $\int_c \omega = 0$ per tutte le p -forme, c è un bordo.

Nel 1931 G. De Rham, con un ingegnosa costruzione di $(n - p)$ -forme associate alla triangolazione duale, provò questi due teoremi. Furono queste osservazioni che permisero di dare un significato geometrico al concetto di coomologia. Infatti, nel 1935, Alexander e Kolmogoroff, considerano per la prima volta, il complesso di cocatene $C^\bullet = \text{Hom}(C_\bullet, G)$ associato ad un complesso di catene C_\bullet su un anello A e un A -modulo G . Essi si limitarono al complesso di catene di una triangolazione, ma nel 1944 Eilemberg applicò la stessa idea a un complesso di catene singolari $S_\bullet(X)$ di uno spazio topologico qualunque X , dando vita alla coomologia singolare di X . In questo modo ad ogni teoria omologica si poteva associare con un significato ben preciso una teoria coomologica. La coomologia di De Rham, pur collocandosi in questa cornice storica, ha una connotazione diversa, in quanto non deriva da una teoria omologica, ma ha una definizione indipendente, che è la seguente: data M , varietà \mathcal{C}^∞ , il p -esimo gruppo di coomologia di De Rham su M è definito come

$$H_{DR}^p(M) = \frac{\{p\text{-forme chiuse su } M\}}{\{p\text{-forme esatte su } M\}}.$$

De Rham dimostrò l'esistenza di un isomorfismo tra questa coomologia e la coomologia singolare a coefficienti in \mathbb{R} .

Come abbiamo visto le applicazioni delle teorie di omologia e coomologia sono numerose: non solo permettono di avere numerosi invarianti utili per la classificazione delle varietà, ma permettono di dimostrare risultati

riguardanti la struttura intrinseca delle varietà e delle applicazioni tra di esse, come ad esempio teoremi di punto fisso. Per quanto riguarda l'argomento di questa tesi, cioè la coomologia di De Rham, essa ha, rispetto ad altre teorie coomologiche, dei vantaggi computazionali, dovuti ad esempio al fatto che i gruppi di coomologia sono spazi vettoriali e l'omomorfismo di catene è un'applicazione lineare, il che rende molto più semplice il calcolo dei gruppi di coomologia ad esempio attraverso la successione di Mayer-Vietoris. Inoltre, mentre in altri tipi di coomologia la definizione del prodotto che dà la struttura di algebra graduata può essere piuttosto complesso, nella coomologia di De Rham, il prodotto di due classi è definito semplicemente come il prodotto esterno dei rappresentanti di tali classi e quindi può essere calcolato in modo immediato. Come quasi sempre succede in matematica, una maggiore semplicità di un risultato è legata ad una minore raffinatezza; infatti uno degli svantaggi della coomologia di De Rham, oltre al fatto che ovviamente si può calcolare solo su varietà C^∞ , è che essendo a coefficienti in \mathbb{R} trascura le parti di torsione che si trovano usando coomologie ad esempio a coefficienti in \mathbb{Z} .

Il primo capitolo è dedicato ai fibrati vettoriali C^∞ e alle loro principali proprietà. Nel primo paragrafo, oltre alla definizione di fibrato vettoriale, sono enunciate alcune proprietà fondamentali e si danno alcuni esempi di fibrati vettoriali tra cui il fibrato tangente e cotangente ad una varietà C^∞ . Il secondo paragrafo si occupa di un aspetto rilevante dei fibrati dovuto alla loro struttura vettoriale e cioè del fatto che su di essi si possono fare costruzioni analoghe a quelle che si fanno sugli spazi vettoriali, come ad esempio il prodotto cartesiano, il fibrato duale, il prodotto esterno e così via. Il paragrafo successivo è dedicato alle sezioni di un fibrato vettoriale. Queste sono fondamentali nel resto della tesi sia perché le forme differenziali di una data varietà, oggetti su cui si costruisce la coomologia di De Rham, sono definite come le sezioni dell'algebra esterna del fibrato cotangente a tale varietà, sia perché alle sezioni di un fibrato è legato un risultato molto importante che dimostreremo nel quarto capitolo. L'ultimo paragrafo del primo capitolo riguarda le metriche e le orientazioni di un fibrato vettoriale; ci si occupa soprattutto di metriche Riemanniane, cioè di metriche su fibrati reali, dando solo alcuni accenni dell'analogo complesso, cioè delle metriche Hermitiane.

Il secondo capitolo inizia con brevi richiami di algebra omologica sui complessi di catene e sulle principali proprietà ad essi associate. Si passa quindi, nel secondo paragrafo, alla definizione di complesso e coomologia di De

Rham, descrivendone le caratteristiche funtoriali e la struttura di algebra anticommutativa graduata. Si calcolano inoltre i primi esempi elementari di coomologia: la coomologia di un punto, la coomologia di grado zero e la coomologia di \mathbb{R} . Il terzo paragrafo tratta dello strumento probabilmente più importante nel calcolo dei gruppi di coomologia: la successione di Mayer-Vietoris. Si dimostra anche l'invarianza omotopica della coomologia di De Rham da cui segue immediatamente il calcolo della coomologia di \mathbb{R}^n , detto anche Lemma di Poincaré. Il capitolo si conclude con numerosi esempi in cui, tramite l'uso della successione di Mayer-Vietoris e dell'invarianza omotopica, si calcola la coomologia di alcune importanti varietà \mathcal{C}^∞ , tra cui ad esempio S^n e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Il terzo capitolo si apre con l'introduzione di un nuovo invariante per diffeomorfismi delle varietà \mathcal{C}^∞ : la coomologia a supporto compatto. Per costruirla invece di considerare tutte le forme differenziali di una data varietà \mathcal{C}^∞ , si considera il complesso delle forme differenziali a supporto compatto e la coomologia associata a tale complesso è appunto la coomologia a supporto compatto. Anche in questo caso esiste una successione di Mayer-Vietoris associata, mentre non vale l'invarianza omotopica; quello che si dimostra è che, se M è una varietà \mathcal{C}^∞ , si ha che

$$H_c^k(M \times \mathbb{R}) = H^{k-1}(M).$$

Nel secondo paragrafo si enunciano altri risultati molto importanti riguardanti la coomologia e la coomologia a supporto compatto e precisamente la dualità di Poincaré che mette in evidenza la relazione esistente tra queste due coomologie e la formula di Künneth che esprime la coomologia e la coomologia a supporto compatto del prodotto cartesiano di due varietà in funzione di quelle dei due fattori. Si dà inoltre la definizione di duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa. Il capitolo si conclude prendendo in considerazione la coomologia dei fibrati vettoriali, mettendo in evidenza la relazione esistente tra la coomologia e la coomologia a supporto compatto della base e quelle dello spazio totale di un dato fibrato vettoriale.

L'ultimo capitolo è forse quello in cui sono descritti i risultati più importanti e interessanti legati allo studio della coomologia delle varietà \mathcal{C}^∞ . Il capitolo inizia con la definizione di un terzo tipo di coomologia associato, in questo caso, ai fibrati vettoriali: la coomologia a supporto compatto nella direzione verticale. Ancora una volta, questa coomologia è legata alle forme differenziali di una varietà, ma in questo caso come varietà si considera lo

spazio totale di un fibrato vettoriale e come forme differenziali si considerano solo quelle tali che la restrizione della proiezione che definisce la struttura di fibrato al loro supporto sia un'applicazione propria. Il risultato più importante del primo paragrafo è l'esistenza, dato un arbitrario k in \mathbb{Z} , di un isomorfismo tra il k -esimo gruppo di coomologia dello spazio base di un fibrato vettoriale orientato e di rango n e il $(k + n)$ -esimo gruppo di coomologia a supporto compatto nella direzione verticale dello spazio totale dello stesso fibrato. Tale isomorfismo prende il nome di isomorfismo di Thom e ad esso è legata la definizione di un invariante per isomorfismo dei fibrati vettoriali: la classe di Thom di un fibrato. Il secondo paragrafo riguarda la relazione che intercorre tra la il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa e la classe di Thom del fibrato normale a tale sottovarietà. Nel paragrafo successivo, invece, si definisce la classe di Eulero, un altro invariante legato ai fibrati vettoriali; a differenza della classe di Thom che è una classe di coomologia a supporto compatto nella direzione verticale dello spazio totale di un fibrato vettoriale, la classe di Eulero è una classe di coomologia dello spazio base. La tesi si conclude con la dimostrazione, attraverso gli strumenti coomologici descritti in precedenza, come ad esempio la relazione esistente tra la classe di Thom e il duale di Poincaré o la formula di Künneth, di alcuni risultati di grande importanza come il teorema dell'indice di Hopf o il teorema di Lefschetz.

1 Fibrati vettoriali

1.1 Definizioni iniziali

Nel seguito del capitolo con la notazione K si intenderà indicare il campo dei numeri reali oppure il campo dei numeri complessi.

Definizione 1.1.1 *Un fibrato vettoriale \mathcal{C}^∞ di rango n sul campo K è una tripletta $\xi = (E, \pi, B)$ dove:*

1. E e B sono varietà \mathcal{C}^∞ .
2. $\pi : E \rightarrow B$ è un'applicazione \mathcal{C}^∞ .
3. $\pi^{-1}(x) = \xi_x$ è un K -spazio vettoriale per ogni $x \in B$.
4. Esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di B e una famiglia di diffeomorfismi

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times K^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) = E|_{U_\alpha}$$

tali che

$$\pi\varphi_\alpha(x, y) = x$$

per ogni $x \in U_\alpha$ e per ogni $y \in K^n$ e le applicazioni

$$\varphi_{\alpha,x} : K^n \rightarrow \xi_x$$

definite da

$$\varphi_{\alpha,x}(y) = \varphi_\alpha(x, y)$$

siano isomorfismi K -lineari.

Se K è uguale a \mathbb{R} (rispettivamente a \mathbb{C}) il fibrato è detto reale (rispettivamente complesso). La varietà E è detta spazio totale e la varietà B è detta spazio base. Il sistema $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ è detto rappresentazione coordinata per ξ e per ogni $x \in B$ lo spazio vettoriale ξ_x è detto fibra su x . Ogni fibra è un sottoinsieme chiuso di E e E è l'unione disgiunta degli spazi vettoriali ξ_x con $x \in B$.

Osservazione 1.1.1 L'applicazione π è suriettiva poiché $\pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale e quindi $\pi^{-1}(x)$ è diverso dal vuoto per ogni $x \in B$.

Osservazione 1.1.2 Data una rappresentazione coordinata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ del fibrato vettoriale ξ , le applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_n(K)$$

definite da

$$g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}$$

sono \mathcal{C}^∞ . Infatti si ha che $\varphi_{\alpha,x} = \varphi_\alpha(x, \cdot)$ quindi, essendo φ_α un diffeomorfismo nella coppia (x, y) , tale applicazione ha in particolare una dipendenza \mathcal{C}^∞ da x . Tali applicazioni sono dette trasformazioni coordinate per ξ .

Esempio 1.1.1 *Fibrato banale*: sia B una varietà \mathcal{C}^∞ e sia

$$\pi : B \times K^n \rightarrow B$$

la proiezione sul primo fattore, allora il fibrato vettoriale $e_B^n = (B \times K^n, \pi, B)$ è un fibrato vettoriale detto fibrato banale di rango n su B .

Esempio 1.1.2 *Restrizione*: sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale. La restrizione di ξ ad una sottovarietà aperta $O \subset B$ è il fibrato vettoriale $\xi|_O = (\pi^{-1}(O), \pi|_O, O)$.

Definizione 1.1.2 *Un sottofibrato ξ' di un fibrato vettoriale ξ è un fibrato vettoriale con la stessa base di ξ tale che le fibre ξ'_x sono sottospazi lineari di ξ_x e la mappa di inclusione $i : E' \rightarrow E$ degli spazi totali è \mathcal{C}^∞ .*

Definizione 1.1.3 *Siano $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B')$ due fibrati vettoriali \mathcal{C}^∞ . Una applicazione di fibrati $\psi : \xi \rightarrow \xi'$ è un'applicazione \mathcal{C}^∞ $\psi : E \rightarrow E'$ che conserva le fibre e tale che le restrizioni*

$$\psi_x : \xi_x \rightarrow \xi'_{\psi_B(x)}$$

sono applicazioni K -lineari per ogni x in B , dove $\psi_B : B \rightarrow B'$ è l'applicazione che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\psi_B} & B'. \end{array}$$

Osservazione 1.1.3 Nelle ipotesi della definizione precedente, l'applicazione ψ_B è \mathcal{C}^∞ . Infatti, sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata per ξ , allora dato $x \in B$ esiste α tale che $x \in U_\alpha$. Inoltre per la commutatività del diagramma si ha che $\psi_B \pi = \pi' \psi$; ora componendo a destra e a sinistra dell'uguale con φ_α si ha:

$$\psi_B \pi \varphi_\alpha(x, y) = \pi' \psi \varphi_\alpha(x, y) \quad \text{con } y \in K^n$$

che per la relazione $\pi \varphi_\alpha(x, y) = x$ per ogni $x \in U_\alpha$, dà

$$\psi_B(x) = (\pi' \psi \varphi_\alpha)(x, y) \quad \text{con } x \in U_\alpha.$$

Quindi ψ_B è \mathcal{C}^∞ in quanto composizione di applicazioni \mathcal{C}^∞ .

Definizione 1.1.4 Siano $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B')$ due fibrati vettoriali. Un'applicazione di fibrati ψ da ξ a ξ' è un isomorfismo se $\psi : E \rightarrow E'$ è un diffeomorfismo. In tal caso ξ e ξ' sono detti fibrati isomorfi e si scrive $\xi \cong \xi'$.

Osservazione 1.1.4 Siano $\xi = (E, \pi, B)$ e $\xi' = (E', \pi', B')$ due fibrati vettoriali. Se $\psi : \xi \rightarrow \xi'$ è un isomorfismo di fibrati vettoriali, ψ_B è un diffeomorfismo. Infatti, per quanto riguarda la suriettività, sia $x' \in B'$, allora, scegliendo $y' \in \pi'^{-1}(x')$, per la suriettività di ψ , esiste $y \in E$ tale che

$$\psi(y) = y'$$

e quindi

$$x' = \pi'(y') = \pi' \psi(y) = \psi_B(\pi(y)) = \psi_B(x),$$

ponendo $\pi(y) = x \in B$.

Per quanto riguarda l'iniettività consideriamo le applicazioni \mathcal{C}^∞ :

$$s_0 : B \longrightarrow E$$

definita da

$$s_0(x) = 0_x \in \xi_x$$

e

$$s'_0 : B' \longrightarrow E'$$

definita da

$$s'_0(x) = 0_x \in \xi'_x,$$

vedremo nell'esempio 1.3.1 che tali applicazioni sono \mathcal{C}^∞ . Queste applicazioni danno luogo al diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi_B} & B' \\ s_0 \downarrow & & \downarrow s'_0 \\ E & \xrightarrow{\psi} & E'. \end{array}$$

Siano $x, x' \in B$ tali che $\psi_B(x) = \psi_B(x')$, allora

$$s'_0 \psi_B(x) = s'_0 \psi_B(x')$$

e, per la commutatività del diagramma,

$$\psi s_0(x) = \psi s_0(x')$$

che implica, per l'iniettività di ψ ,

$$0_x = s_0(x) = s_0(x') = 0_{x'}$$

da cui, essendo le fibre disgiunte, $x = x'$. Quindi ψ_B è invertibile e la sua inversa è ancora \mathcal{C}^∞ (si vede in modo analogo a quanto fatto nell'osservazione 1.1.3 per dimostrare che ψ_B è \mathcal{C}^∞) quindi ψ_B è un diffeomorfismo. Inoltre, per la commutatività del diagramma che coinvolge π e π' (vedi definizione 1.1.3) si ha che ψ induce degli isomorfismi sulle fibre e quindi anche ψ^{-1} è un'applicazione di fibrati.

Definizione 1.1.5 *Un'applicazione di fibrati tra due fibrati vettoriali sulla stessa base è detta forte se induce l'identità sulla base.*

Osservazione 1.1.5 La composizione di applicazioni di fibrati è un'applicazione di fibrati.

Proposizione 1.1.1 *Sia B una varietà \mathcal{C}^∞ e siano assegnati :*

1. per ogni $x \in B$ un K -spazio vettoriale n -dimensionale ξ_x ,
2. un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di B e, per ogni $x \in U_\alpha$, degli isomorfismi K -lineari $\varphi_{\alpha,x} : K^n \rightarrow \xi_x$ tali che le applicazioni $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}$, con $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, siano \mathcal{C}^∞ .

Allora si ha un'unica struttura di fibrato vettoriale su B tale che $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ sia una rappresentazione coordinata. Lo spazio totale E di tale fibrato è l'unione disgiunta con $x \in B$ degli spazi vettoriali ξ_x e $\pi : E \rightarrow B$ è l'applicazione tale che $\pi(y) = x$ se $y \in \xi_x$.

La dimostrazione della proposizione si baserà sul seguente risultato.

Lemma 1.1.1 *Sia fissato $n \in \mathbb{N}$ e sia M un insieme dato dall'unione numerabile di una collezione $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi tali che:*

1. *per ogni $i \in \mathbb{N}$, esiste una biezione $\varphi_i : W_i \rightarrow M_i$, dove M_i è una varietà C^∞ di dimensione n ,*
2. *per ogni coppia i, j , i sottoinsiemi $\varphi_i(W_{ij}) \subset M_i$ e $\varphi_j(W_{ij}) \subset M_j$ sono aperti (dove $W_{ij} = W_i \cap W_j$), e le applicazioni*

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1} : \varphi_j(W_{ij}) \rightarrow \varphi_i(W_{ij})$$

sono diffeomorfismi,

3. *dati due punti distinti $a_i \in W_i$ e $a_j \in W_j$, esistono due insiemi disgiunti U_i e U_j tali che $a_i \in U_i \subset W_i$, $a_j \in U_j \subset W_j$ e gli insiemi $\varphi_i(U_i)$ e $\varphi_j(U_j)$ sono aperti.*

Allora esiste un'unica struttura di varietà C^∞ su M tale che gli insiemi W_i siano aperti e le applicazioni φ_i siano diffeomorfismi.

Dimostrazione. Dimostriamo che esiste un'unica topologia su M tale che gli insiemi W_i siano aperti e le applicazioni φ_i siano omeomorfismi e che tale topologia è:

$$\tau = \{A \in M \text{ tali che } \varphi_i(A \cap W_i) \text{ è aperto in } M_i\}.$$

Innanzitutto facciamo vedere che (M, τ) è uno spazio topologico. Infatti:

1. il vuoto e M sono aperti in quanto le loro immagini attraverso le φ_i sono il vuoto e le varietà M_i ,
2. dati $\{A_j\}_{j \in J} \subset \tau$ si ha

$$\varphi_i\left(\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \cap W_i\right) = \bigcup_{j \in J} \varphi_i(A_j \cap W_i),$$

che essendo unione di aperti è aperto,

3. dati $\{A_j\}_{j \in J} \subset \tau$ con J finito si ha

$$\varphi_i\left(\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \cap W_i\right) = \bigcap_{j \in J} \varphi_i(A_j \cap W_i),$$

che essendo intersezione finita di aperti è aperto.

Per l'ipotesi (2) si ha che $\varphi_j(W_i \cap W_j)$ è aperto in M_j , quindi, per definizione, W_i è aperto in M per ogni $i \in \mathbb{N}$. Infine rispetto a questa topologia le φ_i sono omeomorfismi; infatti, fissato ad arbitrio $i \in \mathbb{N}$, sia A un aperto in M_i e consideriamo $\varphi_i^{-1}(A) \subset W_i$; si ha che

$$\varphi_j(\varphi_i^{-1}(A) \cap W_j) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(A) \cap W_{ij}) = \varphi_j \varphi_i^{-1}(A \cap \varphi_i(W_{ij})) = \varphi_{ji}(A \cap \varphi_i(W_{ij})),$$

ma $A \cap \varphi_i(W_{ij})$ è aperto in M_i perché è intersezione di aperti quindi, essendo φ_{ji} un diffeomorfismo per l'ipotesi (2), $\varphi_{ji}(A \cap \varphi_i(W_{ij}))$ è aperto in M_j perciò φ_i è continua rispetto alla topologia τ . Per come è definita τ è ovvio che anche φ_i^{-1} è continua e quindi φ_i è un omeomorfismo.

Lo spazio topologico (M, τ) è a base numerabile, in quanto unione numerabile di spazi a base numerabile, ed è T_2 per l'ipotesi (3). Sia ora $\{U_\alpha^i, \sigma_\alpha^i\}$ un atlante per M_i . Definiamo $V_\alpha^i = \varphi_i^{-1}(U_\alpha^i)$ e

$$\psi_\alpha^i = \sigma_\alpha^i \varphi_i |_{V_\alpha^i}: V_\alpha^i \rightarrow \sigma_\alpha^i(U_\alpha^i) \subset \mathbb{R}^n.$$

Si ha che $\{V_\alpha^i, \psi_\alpha^i\}$ è un atlante \mathcal{C}^∞ per M , infatti su $\psi_\alpha^i(V_\alpha^i \cap V_\beta^j)$ le applicazioni:

$$\psi_\beta^j(\psi_\alpha^i)^{-1} = \sigma_\beta^j \varphi_j \varphi_i^{-1} (\sigma_\alpha^i)^{-1}$$

sono \mathcal{C}^∞ perché, per l'ipotesi (2), $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ è un diffeomorfismo e le σ_α^i sono carte. Quindi M è una varietà \mathcal{C}^∞ e, per costruzione, i W_i sono aperti e le φ_i sono diffeomorfismi. \square

Dimostrazione della proposizione 1.1.1. Definiamo

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times K^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

come

$$\psi_\alpha(x, y) = \psi_{\alpha, x}(y).$$

Si ha che le $\{\psi_\alpha\}$ sono biunivoche infatti:

1. $(x, y), (x', y') \in U_\alpha \times K^n$ tali che $\psi_\alpha(x, y) = \psi_\alpha(x', y')$, allora si ha $\psi_{\alpha, x}(y) = \psi_{\alpha, x'}(y')$ che implica che $\xi_x \cap \xi_{x'} \neq \emptyset$ e quindi, essendo gli spazi vettoriali ξ_x disgiunti tra loro, implica $x = x'$, da cui, per l'iniettività di $\psi_{\alpha, x}$, si ha $y = y'$.

2. Dato $y \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, y sta in E che è l'unione disgiunta degli spazi ξ_x , quindi esiste un $x \in B$ tale che $y \in \xi_x$ e esiste un α tale che $x \in U_\alpha$; ora, per la suriettività di $\psi_{\alpha,x}$ si ha che esiste $x' \in K^n$ tale che $\psi_\alpha(x, x') = \psi_{\alpha,x}(x') = y$.

Definiamo le applicazioni

$$\psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n$$

come

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \psi_\beta.$$

Tali applicazioni sono ovviamente biunivoche e per l'ipotesi (2) sono anche \mathcal{C}^∞ , quindi sono diffeomorfismi. Ora, assumendo α numerabile (non è restrittivo) e applicando il lemma 1.1.1 con $W_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, $\varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1}$ e $M_\alpha = U_\alpha \times K^n$, otteniamo che c'è un'unica struttura di varietà \mathcal{C}^∞ su E tale che ψ_α siano diffeomorfismi. Inoltre si ha che la restrizione di π a $\pi^{-1}(U_\alpha)$ è $\pi_\alpha \psi_\alpha^{-1}$, dove $\pi_\alpha : U_\alpha \times K^n \rightarrow U_\alpha$, è la proiezione sul primo fattore e quindi è \mathcal{C}^∞ . Per cui si ha che π è \mathcal{C}^∞ su $\pi^{-1}(U_\alpha)$, quindi è \mathcal{C}^∞ su E . Perciò, per definizione, (E, π, B) è un fibrato vettoriale con rappresentazione coordinata $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$. \square

Esempio 1.1.3 *Pull-back*: sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n e sia $\sigma : M \rightarrow B$ un'applicazione \mathcal{C}^∞ tra varietà. Per ogni $x \in M$ consideriamo lo spazio vettoriale $\xi_{\sigma(x)}$ e definiamo N come l'unione disgiunta degli spazi $\xi_{\sigma(x)}$. Sia poi $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata per ξ con trasformazioni associate $\{g_{\alpha\beta}\}$. Poniamo $V_\alpha = \sigma^{-1}(U_\alpha)$ e definiamo $\psi_{\alpha,x} : K^n \rightarrow \xi_{\sigma(x)}$ come $\psi_{\alpha,x}(y) = \varphi_{\alpha,\sigma(x)}(y)$ per ogni $x \in V_\alpha$. Allora

$$f_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha,x}^{-1} \psi_{\beta,x} = \varphi_{\alpha,\sigma(x)}^{-1} \varphi_{\beta,\sigma(x)} = g_{\alpha\beta}(\sigma(x)) = (g_{\alpha\beta}\sigma)(x)$$

quindi $f_{\alpha\beta}$ è \mathcal{C}^∞ . Perciò per la proposizione 1.1.1 $\sigma^*\xi = (N, p, M)$ è un fibrato vettoriale di rango n su M ed è detto pull-back di ξ . L'identità $\xi_{\sigma(x)} \rightarrow \xi_{\sigma(x)}$ definisce un'applicazione di fibrati $\tau : \sigma^*\xi \rightarrow \xi$ che induce σ sulle basi.

Definizione 1.1.6 *Sia B una varietà \mathcal{C}^∞ . Indichiamo con $\text{Vect}_k(B)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali reali di rango k su B . Tale insieme è un insieme puntato con punto base la classe di isomorfismo del fibrato banale di rango k . Se $f : B \rightarrow M$ è un'applicazione \mathcal{C}^∞ tra varietà, chiamiamo $\text{Vect}_k(f)$ la mappa di pull-back sui fibrati. In questo modo per ogni k intero $\text{Vect}_k()$ è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà \mathcal{C}^∞ e applicazioni \mathcal{C}^∞ alla categoria degli insiemi puntati e mappe puntate.*

Esempio 1.1.4 *Fibrato tangente*: sia M una varietà \mathcal{C}^∞ di dimensione n e indichiamo con $T_x M$ lo spazio tangente ad M nel punto x . Definiamo TM come l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $T_x M$ con $x \in M$. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante per M , questo induce degli isomorfismi

$$d_x \varphi_\alpha : T_x \rightarrow T_{\varphi_\alpha(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \quad \text{con } x \in U_\alpha$$

tali che le applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

definite da

$$g_{\alpha\beta}(x) = (d_x \varphi_\alpha)^{-1} d_x \varphi_\beta$$

sono \mathcal{C}^∞ . Quindi per la proposizione 1.1.1 (TM, π, M) è un fibrato vettoriale reale di dimensione n detto fibrato tangente. Una varietà M il cui fibrato tangente è banale è detta parallelizzabile.

Esempio 1.1.5 *Fibrato cotangente*: sia M una varietà \mathcal{C}^∞ di dimensione n e indichiamo con $T_x^* M$ lo spazio cotangente ad M in x . Analogamente a quanto fatto per il fibrato tangente, si può definire il fibrato cotangente ad M come $(T^* M, \pi, M)$ dove $T^* M$ è l'unione disgiunta degli spazi $T_x^* M$ con $x \in M$.

Esempio 1.1.6 *Fibrato tautologico su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$* : identifichiamo i punti di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con le rette di \mathbb{C}^{n+1} passanti per l'origine. Sia E il sottospazio di $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ definito da

$$E = \{(x, l) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid x \in l\}$$

e sia

$$\pi : E \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

l'applicazione definita da

$$\pi(x, l) = l.$$

Dimostriamo che $\tau^n = (E, \pi, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ è un fibrato vettoriale complesso di rango uno. Per ogni $[P] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, si ha che $\pi^{-1}([P])$ è la retta vettoriale generata da P in \mathbb{C}^{n+1} . Inoltre, consideriamo il ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, dato da

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_i \neq 0\},$$

cioè (dividendo per z_i che è diverso da zero)

$$U_i = \{[u_0, \dots, 1, \dots, u_n] \in \mathbb{CP}^n\},$$

dove l'1 è all' i -esimo posto. Si ha che

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x, l) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n \mid x \in l, l \in U_i\},$$

cioè se $x = (x_0, \dots, x_n)$ e $l = [u_0, \dots, 1, \dots, u_n]$,

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x, l) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n \mid x_j = x_i u_j \text{ } i = 1, \dots, n\}.$$

Quindi $\pi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{C}^{n+1} \times U_i$ è il grafico della funzione $\mathbb{C} \times U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ definita da

$$\begin{cases} x_0 & = & x_i u_0 \\ \vdots & & \\ x_{i-1} & = & x_i u_{i-1} \\ x_{i+1} & = & x_i u_{i+1} \\ \vdots & & \\ x_n & = & x_i u_n, \end{cases}$$

il che dà a E una struttura di sottovarietà di $\mathbb{C}^{n+1} \times U_i$ di codimensione $2n$ (le n equazioni a variabili complesse che definiscono localmente E , si leggono come $2n$ equazioni a variabili reali). Definiamo per $i = 1, \dots, n$,

$$\psi_i : U_i \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U_i) = E|_{U_i}$$

come l'applicazione tale che

$$\psi_i([u_0, \dots, 1, \dots, u_n], t) = ((tu_0, \dots, t, \dots, tu_n), [u_0, \dots, 1, \dots, u_n]),$$

si ha che ψ_i è un diffeomorfismo e per ogni $l \in U_i$ l'applicazione

$$\psi_{i,l} : \mathbb{C} \rightarrow \tau_l^n$$

definita da

$$\psi_{i,l}(t) = \psi_i(l, t) = tl,$$

è \mathbb{C} -lineare. Quindi $\tau^n = (E, \pi, \mathbb{CP}^n)$ è un fibrato vettoriale complesso di rango 1 con rappresentazione coordinata $\{U_i, \psi_i\}_{i \in \mathbb{N}, i \leq n}$.

Definizione 1.1.7 (1) Siano ξ^1, \dots, ξ^p, ξ fibrati vettoriali sulla stessa base B . Un'applicazione p -lineare di fibrati $\Phi : (\xi^1, \dots, \xi^p) \rightarrow \xi$ è una collezione di applicazioni p -lineari $\Phi_x : \xi_x^1 \times \dots \times \xi_x^p \rightarrow \xi_x$ con $x \in B$ tali che se $\{U_\alpha, \varphi_\alpha^i\}$ è una rappresentazione coordinata per ξ^i per $i = 1, \dots, p$ e $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ lo è per ξ (si può assumere, eventualmente passando a un raffinamento, che il ricoprimento di B sia lo stesso per tutti i fibrati), allora le applicazioni

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow L(K^p, K)$$

definite da

$$\Phi_\alpha(x) = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \Phi_x \varphi_{\alpha,x}^1 \times \dots \times \varphi_{\alpha,x}^p$$

sono \mathcal{C}^∞ (dove $L(K^p, K)$ è l'insieme delle applicazioni lineari da K^p a K). Questa definizione non dipende dalla scelta delle rappresentazioni coordinate e coincide con la definizione di applicazione di fibrati forte per $p = 1$.

(2) Definiamo

$$\text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi) = \{\Phi \mid \Phi : (\xi^1, \dots, \xi^p) \rightarrow \xi \text{ e } \Phi \text{ è } p\text{-lineare}\}.$$

Se $\xi = B \times \mathbb{R}$ gli elementi di $\text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi)$ sono detti funzioni p -lineari. L'insieme $\text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi)$ con le operazioni

$$\begin{aligned} + : \text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi) \times \text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi) &\rightarrow \text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi) \\ (\Phi, \Psi) &\mapsto \Phi + \Psi \end{aligned}$$

tale che

$$\begin{aligned} (\Phi + \Psi)_x &= \Phi_x + \Psi_x \\ \cdot : \text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi) \times S(B) &\rightarrow \text{Hom}(\xi^1, \dots, \xi^p; \xi) \\ (\Phi, f) &\mapsto f \cdot \Phi \end{aligned}$$

tale che

$$(f \cdot \Phi)_x = f(x) \cdot \Phi(x)$$

(dove $S(B) = \{f \mid f : B \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^\infty(B, \mathbb{R})\}$) è un $S(B)$ -modulo.

Un elemento $\Phi \in \text{Hom}(\xi, \dots, \xi; \eta)$ è detto antisimmetrico (rispettivamente simmetrico) se per ogni $x \in B$ le applicazioni p -lineari Φ_x sono antisimmetriche (rispettivamente simmetriche). Denotiamo con $A^p(\xi, \eta)$ (rispettivamente $S^p(\xi, \eta)$) l'insieme delle applicazioni p -lineari antisimmetriche (rispettivamente simmetriche) da ξ ad η . Si ha che $A^p(\xi, \eta)$ e $S^p(\xi, \eta)$ sono sottomoduli di $\text{Hom}(\xi, \dots, \xi; \eta)$. Infine il modulo delle funzioni p -lineari antisimmetriche (rispettivamente simmetriche) viene denotato con $A^p(\xi)$ (rispettivamente $S^p(\xi)$).

1.2 Operazioni tra fibrati vettoriali

In questo paragrafo affronteremo, partendo da assegnati fibrati vettoriali, la costruzione di nuovi fibrati tramite operazioni standard. Per il resto del paragrafo $\xi = (E, \pi, B)$, $\xi^1 = (E^1, \pi_1, B^1)$ e $\xi^2 = (E^2, \pi_2, B^2)$ saranno fibrati vettoriali sullo stesso campo K , di rango rispettivamente n , n_1 e n_2 , con rappresentazione coordinate rispettivamente $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, $\{U_\alpha^1, \varphi_\alpha^1\}$ e $\{U_\alpha^2, \varphi_\alpha^2\}$ e con trasformazioni coordinate rispettivamente $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}^1$ e $g_{\alpha\beta}^2$.

1. **FIBRATO DUALE:** sia assegnato ξ . Definiamo E^* come l'unione disgiunta degli spazi vettoriali ξ_x^* con $x \in B$. Definiamo inoltre degli isomorfismi lineari

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha,x} : K^n &\cong (K^n)^* \rightarrow \xi_x^* \\ \psi_{\alpha,x}(f) &= f\varphi_{\alpha,x}^{-1}.\end{aligned}$$

Le applicazioni $\psi_{\alpha,x}^{-1}\psi_{\beta,x}$ sono \mathcal{C}^∞ e quindi per la proposizione 1.1.1 $\xi^* = (E^*, p, B)$ è un fibrato vettoriale di rango n detto fibrato vettoriale duale a ξ .

2. **PRODOTTO CARTESIANO:** siano ξ^1 e ξ^2 i fibrati vettoriali sopra definiti. Il prodotto cartesiano di ξ^1 e ξ^2 è il fibrato vettoriale $\xi^1 \times \xi^2$ di rango $n_1 + n_2$ definito dalla proiezione

$$\begin{aligned}\pi_1 \times \pi_2 : E^1 \times E^2 &\rightarrow B^1 \times B^2 \\ \pi_1 \times \pi_2(x_1, x_2) &= (\pi_1(x_1), \pi_2(x_2))\end{aligned}$$

e la cui fibra nel punto (x_1, x_2) è lo spazio vettoriale $\xi_{x_1}^1 \times \xi_{x_2}^2$. Una rappresentazione coordinata per $\xi^1 \times \xi^2$ è data da $\{U_\alpha^1 \times U_\beta^2, \chi_{\alpha\beta}\}$ dove le applicazioni

$$\chi_{\alpha\beta} : (U_\alpha^1 \times U_\beta^2) \times (K^{n_1} \times K^{n_2}) \rightarrow \pi_1^{-1}(U_\alpha^1) \times \pi_2^{-1}(U_\beta^2)$$

sono definite da

$$\chi_{\alpha\beta}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (\varphi_\alpha^1(x_1, y_1), \varphi_\beta^2(x_2, y_2)).$$

Le proiezioni $p_1 : E^1 \times E^2 \rightarrow E^1$ e $p_2 : E^1 \times E^2 \rightarrow E^2$ danno delle applicazioni di fibrati $\xi^1 \times \xi^2 \rightarrow \xi^1$ e $\xi^1 \times \xi^2 \rightarrow \xi^2$. Infine il prodotto cartesiano di fibrati ha la seguente proprietà di fattorizzazione: se ξ è un terzo fibrato vettoriale e $\rho_1 : E \rightarrow E^1$ e $\rho_2 : E \rightarrow E^2$ sono applicazioni

di fibrati esiste un'unica applicazione di fibrati $p : E \rightarrow E^1 \times E^2$ tale che

$$p_1 p = \rho_1,$$

$$p_2 p = \rho_2.$$

3. SOMMA DI WHITNEY: siano ξ^1 e ξ^2 due fibrati vettoriali sulla stessa base B , di dimensioni rispettivamente, n_1 e n_2 . Sia

$$d : B \rightarrow B \times B$$

$$d(x) = (x, x)$$

l'inclusione diagonale. Il fibrato vettoriale $d^*(\xi^1 \times \xi^2)$ (vedi esempio 1.1.3) è detto somma di Whitney di ξ^1 e ξ^2 e viene denotato con $\xi^1 \oplus \xi^2$. Si ha che ogni fibra $(\xi^1 \oplus \xi^2)_x$ è canonicamente isomorfa alla somma diretta $\xi_x^1 \oplus \xi_x^2$. Se $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ sono rappresentazioni coordinate per, rispettivamente, ξ^1 e ξ^2 (non è restrittivo, eventualmente passando ad un raffinamento, supporre che il ricoprimento di B sia lo stesso) si ha che una rappresentazione coordinata per $\xi_x^1 \oplus \xi_x^2$ è $\{U_\alpha, \varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha\}$, dove l'applicazione

$$\varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha : U_\alpha \times (K^{n_1} \times K^{n_2}) \rightarrow \pi_1^{-1}(U_\alpha) \times \pi_2^{-1}(U_\alpha)$$

è definita come

$$\varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha(x, (y, y')) = (\varphi_\alpha(x, y), \psi_\alpha(x, y')).$$

4. OMOMORFISMI: dati i fibrati vettoriali ξ^1 e ξ^2 definiti come sopra, ma sulla stessa base B , assegniamo ad ogni $x \in B$ lo spazio vettoriale $\text{Hom}(\xi_x^1, \xi_x^2)$, e ad ogni $x \in U_\alpha^1$ l'isomorfismo lineare

$$\psi_{\alpha,x} : \text{Hom}(K^{n_1}, K^{n_2}) \rightarrow \text{Hom}(\xi_x^1, \xi_x^2)$$

definito da

$$\psi_{\alpha,x}(f) = \varphi_{\alpha,x}^2 f (\varphi_{\alpha,x}^1)^{-1}.$$

Quindi per il principio costruttivo enunciato nella proposizione 1.1.1 si ha che $\text{Hom}(\xi^1, \xi^2) = (\overline{E}, \pi, B)$, dove \overline{E} è l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $\text{Hom}(\xi_x^1, \xi_x^2)$ con $x \in B$, è un fibrato vettoriale di rango $n_1 \cdot n_2$.

5. POTENZA ESTERNA: dato il fibrato vettoriale ξ la p -esima potenza esterna di ξ (con $p \geq 1$), è un fibrato vettoriale $\Lambda^p \xi$ insieme ad un'applicazione p -lineare alternante di fibrati

$$\Lambda^p : \underbrace{(\xi, \dots, \xi)}_{p\text{-volte}} \rightarrow \Lambda^p \xi$$

con la seguente proprietà di fattorizzazione: ogni applicazione p -lineare antisimmetrica $\Phi : (\xi, \dots, \xi) \rightarrow \xi^1$ si può scrivere in modo unico come $\Phi = \varphi \Lambda^p$ dove $\varphi : \Lambda^p \xi \rightarrow \xi^1$ è un'applicazione di fibrati forte. L'applicazione che associa ad ogni $\varphi \in \text{Hom}(\Lambda^p \xi, \xi^1)$ l'applicazione $\varphi \Lambda^p \in A^p \xi$ è un isomorfismo di moduli.

Dimostriamo che, dato ξ , la sua p -esima potenza esterna esiste sempre. Per ogni $x \in B$ consideriamo lo spazio vettoriale $\Lambda^p \xi_x$ e definiamo $\Lambda^p E$ come l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $\Lambda^p \xi_x$. Assegniamo poi ad ogni $x \in U_\alpha$ l'isomorfismo lineare

$$\Lambda^p \varphi_{\alpha,x} : \Lambda^p K^n \rightarrow \Lambda^p \xi_x.$$

Si ha che

$$\Lambda^p \varphi_{\alpha,x}^{-1} \Lambda^p \varphi_{\beta,x} = \Lambda^p (\varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x})$$

è \mathcal{C}^∞ in x perché $\varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}$ è un isomorfismo lineare, quindi, scegliendo una base in K^n , può essere espresso come una matrice $F \in GL_n(K)$ i cui elementi sono funzioni di x , \mathcal{C}^∞ per ipotesi; inoltre la p -esima potenza esterna di un'applicazione lineare, rispetto alla base di $\Lambda^p K^n$ ottenuta dalla base di K^n sopra fissata, è una matrice i cui elementi sono i minori $p \times p$ di F , quindi sono funzioni \mathcal{C}^∞ in x . Perciò per la proposizione 1.1.1 $\Lambda^p \xi = (\Lambda^p E, \pi, B)$ è un fibrato vettoriale su B di rango $\binom{n}{p}$. Inoltre l'applicazione Λ^p è così definita:

$$\Lambda_x^p : \xi_x \times \dots \times \xi_x \rightarrow \Lambda^p \xi_x$$

$$\Lambda_x^p(y_1, \dots, y_p) = y_1 \wedge \dots \wedge y_p$$

con $y_1, \dots, y_p \in \xi_x$.

In particolare si ha che $\Lambda^p \xi = B \times \{0\}$ se $p > n$. Estendiamo poi la definizione di $\Lambda^p \xi$ al caso di $p = 0$ ponendo $\Lambda^0 \xi = B \times \mathbb{R}$. Definiamo infine l'algebra esterna di ξ come $\Lambda \xi = \bigoplus_{i=1}^n \Lambda^i \xi$ dove n è il rango di ξ .

6. FIBRATO QUOZIENTE: sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n . Sia $\xi' = (E', \pi', B)$ un sottofibrato di rango q di ξ . Allora, per definizione di sottofibrato, si ha che l'immersione di E' in E è \mathcal{C}^∞ e il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{i} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{id_B} & B. \end{array}$$

Inoltre, come vedremo nell'osservazione 1.3.1, è possibile fissare rappresentazioni coordinate $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ per, rispettivamente, ξ e ξ' (eventualmente passando ad un raffinamento si può supporre che il ricoprimento di B sia lo stesso) tali che, per ogni α , il diagramma

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times K^q & \xrightarrow{id_{U_\alpha} \times j} & U_\alpha \times K^n \\ \psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\alpha \\ E' |_{U_\alpha} & \xrightarrow{i} & E |_{U_\alpha}, \end{array}$$

commuta, dove $j : K^q \rightarrow K^n$ è l'immersione. Inoltre per ogni $x \in B$ si ha che ξ'_x è un sottospazio lineare di ξ_x , quindi $\frac{\xi'_x}{\xi'_x}$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n - q$. Fissiamo α e per ogni $x \in U_\alpha$ consideriamo l'applicazione

$$\theta_{\alpha,x} : K^{n-q} \rightarrow \frac{\xi_x}{\xi'_x}$$

definita da

$$\theta_{\alpha,x}(y_{q+1}, \dots, y_n) = p_x \varphi_{\alpha,x}(0, \dots, 0, y_{q+1}, \dots, y_n),$$

dove

$$p_x : \xi_x \rightarrow \frac{\xi_x}{\xi'_x}$$

è la proiezione sul quoziente. Dimostriamo che $\theta_{\alpha,x}$ è un isomorfismo. Fissato $x \in U_\alpha$ il diagramma sopra si restringe al diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} K^q & \xrightarrow{j} & K^n \\ \psi_{\alpha,x} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\alpha,x} \\ \xi'_x & \xrightarrow{i} & \xi_x, \end{array}$$

quindi, fissata una base (e_1, \dots, e_q) su K^q , una base per ξ'_x è

$$\mathcal{A}_{\alpha,x} = (\psi_{\alpha,x}(e_1), \dots, \psi_{\alpha,x}(e_q))$$

e una base per ξ_x è

$$\mathcal{B}_{\alpha,x} = (i\psi_{\alpha,x}(e_1), \dots, i\psi_{\alpha,x}(e_q), f_{q+1}, \dots, f_n).$$

Si ha che rispetto a questa base su ξ_x e alla base

$$\{j(e_1), \dots, j(e_q), e_{q+1}, \dots, e_n\}$$

su K^n l'applicazione $\varphi_{\alpha,x}$ è individuata dalla matrice

$$\Phi_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} \Psi_{\alpha,x} & * \\ 0 & M_{\alpha,x} \end{pmatrix},$$

dove $\Psi_{\alpha,x}$ è la matrice di $\psi_{\alpha,x}$ rispetto alle basi (e_1, \dots, e_q) su K^q e \mathcal{B} su ξ'_x . Scrivendo $\varphi_{\alpha,x}$ in questo modo risulta evidente che $M_{\alpha,x}$ non è altro che la matrice dell'applicazione $\theta_{\alpha,x}$ rispetto alle basi (e_{q+1}, \dots, e_n) su K^{n-q} e (f_{q+1}, \dots, f_n) su $\frac{\xi_x}{\xi'_x}$, quindi in particolare si ha che $\theta_{\alpha,x}$ è \mathcal{C}^∞ in x ed essendo

$$0 \neq \det \Phi_{\alpha,x} = \det \Psi_{\alpha,x} \det M_{\alpha,x},$$

si ha che $\det M_{\alpha,x} \neq 0$, perciò $\theta_{\alpha,x}$ è un isomorfismo. Questo per la proposizione 1.1.1 prova che, chiamando F l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $\frac{\xi_x}{\xi'_x}$ con $x \in B$, la tripletta $\frac{\xi}{\xi'} = (F, p, B)$ è un fibrato vettoriale di rango $n - q$ detto fibrato quoziente di ξ e ξ' .

Esempio 1.2.1 Un esempio molto importante di fibrato quoziente è il fibrato normale. Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ di dimensione n e sia S una sottovarietà di dimensione k allora definiamo il fibrato normale a S in M come

$$N_{S/M} = \frac{TM|_S}{TS},$$

dove $TM|_S$ è la restrizione a S del fibrato tangente a M e TS è il fibrato tangente a S . Il fibrato normale a S in M è un fibrato di rango $n - k$ su S .

1.3 Sezioni

Definizione 1.3.1 Una sezione di un fibrato vettoriale $\xi = (E, \pi, B)$ è una funzione $\mathcal{C}^\infty s : B \rightarrow E$ tale che $s(x) \in \xi_x$ per ogni $x \in B$. Dato $U \subset B$ sottoinsieme aperto, una sezione di ξ su U è una sezione del fibrato restrizione $\xi|_U$. Una sezione s è detta mai nulla se per ogni $x \in B$, $s(x)$ è un vettore non nullo di ξ_x . Il supporto di una sezione s è l'insieme

$$\text{supp } s = \overline{\{x \in B \text{ tali che } s(x) \neq 0_x\}}.$$

Si ha che il supporto di una sezione mai nulla è tutto B .

Indichiamo l'insieme delle sezioni di un fibrato vettoriale ξ con $\text{Sec}(\xi)$. L'insieme $\text{Sec}(\xi)$ è un $S(B)$ -modulo con le operazioni

$$(s, s') \mapsto^+ s + s'$$

tale che

$$(s + s')(x) = s(x) + s'(x),$$

$$(f, s) \mapsto f \cdot s$$

tale che

$$(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s(x)$$

con $s, s' \in \text{Sec}(\xi)$, $f \in S(B)$ e $x \in B$.

Esempio 1.3.1 Sezione nulla: ogni fibrato vettoriale ammette la sezione nulla definita da $s_0(x) = 0_x$ per ogni x nello spazio base B . Dimostriamo che s_0 è \mathcal{C}^∞ . Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata per il fibrato vettoriale ξ su K e sia n il rango di ξ . Consideriamo la seguente applicazione:

$$s' : U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times K^n$$

definita da

$$s'(x) = (x, 0).$$

Si ha che s' è chiaramente \mathcal{C}^∞ , inoltre su U_α vale

$$\varphi_\alpha s'(x) = \varphi_\alpha(x, 0) = \varphi_{\alpha,x}(0) = 0_x,$$

perché $\varphi_{\alpha,x}$ è K -lineare. Perciò per ogni α si ha che $s_0|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha s'$ e quindi s_0 è \mathcal{C}^∞ .

Esempio 1.3.2 *Campo di vettori:* sia B una varietà \mathcal{C}^∞ con atlante $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ e siano (x_1, \dots, x_n) coordinate locali. Allora

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1^P}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^P}\right)$$

è una base per $T_P B$ con $P \in B$. Si ha che un campo di vettori $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ è una sezione del fibrato tangente a B . Infatti, dato $P \in B$,

$$\theta_P = \sum_{i=1}^n \theta_i(P) \left(\frac{\partial}{\partial x_i^P}\right)$$

è un vettore di $T_P M$ che è la fibra nel punto P del fibrato tangente a B .

Definizione 1.3.2 *Sia ξ un fibrato vettoriale con base B e siano s_1, \dots, s_n sezioni di ξ . Allora tali sezioni sono dette ovunque indipendenti se, per ogni $x \in B$, i vettori $s_1(x), \dots, s_n(x)$ sono linearmente indipendenti.*

Teorema 1.3.1 *Un fibrato vettoriale reale di rango n è banale se e solo se ammette n sezioni s_1, \dots, s_n ovunque indipendenti.*

La dimostrazione del teorema si baserà sul seguente risultato.

Lemma 1.3.1 *Siano ξ e η due fibrati vettoriali sulla base B con spazi totali rispettivamente E ed E' . Sia poi $f : E \rightarrow E'$ una funzione \mathcal{C}^∞ che fa corrispondere isomorficamente ad ogni spazio vettoriale ξ_x lo spazio vettoriale η_x per ogni $x \in B$, allora ha che f è un isomorfismo e quindi ξ e η sono isomorfi.*

Dimostrazione. Sia x_0 un arbitrario punto di B e siano rispettivamente $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ rappresentazioni coordinate per ξ e η tali che $x_0 \in U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0}$. Dobbiamo mostrare che la composizione

$$(U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0}) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_{\beta_0}^{-1} f \varphi_{\alpha_0}} (U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0}) \times \mathbb{R}^n$$

è un diffeomorfismo. Ponendo

$$\psi_{\beta_0}^{-1}(f(\varphi_{\alpha_0}(x, t))) = (x, l)$$

è evidente che $l = (l_1, \dots, l_n)$, per l'ipotesi che f ristretto alle fibre è un isomorfismo di spazi vettoriali, può essere espressa nella forma

$$l_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x)t_j \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

dove $[f_{ij}(x)]$ è una matrice invertibile di numeri reali. Inoltre la dipendenza degli elementi $f_{ij}(x)$ da x è \mathcal{C}^∞ perché φ_{α_0} e ψ_{β_0} sono rappresentazioni coordinate e f è per ipotesi un isomorfismo sulle fibre. Sia $[g_{ji}(x)]$ la matrice inversa. Si ha

$$\varphi_{\alpha_0}^{-1} f^{-1} \psi_{\beta_0}(x, l) = (x, t)$$

dove

$$t_j = \sum_{i=1}^n g_{ji}(x)l_i \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Per la formula

$$[g_{ji}(x)] = \det([f_{ij}(x)])^{-1} \text{cof}([f_{ij}])$$

(dove $\text{cof}([f_{ij}])$ è la matrice cofattore di $[f_{ij}]$) e per l'invertibilità di $[f_{ij}]$, (che implica che il suo determinante sia diverso da zero), si ha che gli elementi di $[g_{ij}]$ dipendono in modo \mathcal{C}^∞ dalla matrice $[f_{ij}(x)]$ e quindi essi dipendono in modo \mathcal{C}^∞ da x . Perciò $\varphi_{\alpha_0}^{-1} f^{-1} \psi_{\beta_0}$ è \mathcal{C}^∞ e questo completa la dimostrazione del lemma. \square

Dimostrazione del teorema 1.3.1 Siano s_1, \dots, s_n sezioni ovunque indipendenti del fibrato $\xi = (E, \pi, B)$. Definiamo

$$f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$$

come

$$f(x, t) = t_1 s_1(x) + \dots + t_n s_n(x).$$

Chiaramente f è \mathcal{C}^∞ e fa corrispondere isomorficamente ad ogni fibra del fibrato banale ϵ_B^n la corrispondente fibra di ξ . Quindi per il lemma 1.3.1 f è un isomorfismo di fibrati e perciò ξ è banale.

Al contrario supponiamo che ξ sia un fibrato banale, con rappresentazione coordinata $\{B, \varphi\}$. Definendo

$$s_i(x) = \varphi(x, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) \in \xi_x \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

(con l'1 nell' i -esimo posto) è evidente che s_1, \dots, s_n sono sezioni ovunque indipendenti. Questo completa la prova. \square

Osservazione 1.3.1 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n e sia $\xi' = (E', \pi', B)$ un sottofibrato di rango k e sia $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata per ξ' tale che $\{U_\alpha\}$ sia anche il ricoprimento associato ad una qualche rappresentazione coordinata per ξ . Fissato α , l'applicazione ψ_α induce k sezioni $(s_1^\alpha, \dots, s_k^\alpha)$ ovunque indipendenti su U_α (vedi dimostrazione del teorema 1.3.1). Indicando con i l'immersione di E' in E , si ha che, essendo i un'applicazione \mathcal{C}^∞ per definizione, $(is_1^\alpha, \dots, is_k^\alpha)$ sono k sezioni ovunque indipendenti del fibrato $\xi|_{U_\alpha}$. Quindi poiché $\xi|_{U_\alpha}$ è un fibrato banale di rango n , per il teorema precedente esistono n sezioni $(v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha)$ ovunque indipendenti su U_α ; le scegliamo in modo che $v_i^\alpha = is_i^\alpha$ per $i = 1, \dots, k$. Allora se chiamiamo $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ la rappresentazione coordinata di ξ associata alle sezioni $(v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha)$ si ha che, per ogni α , il diagramma

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times K^q & \xrightarrow{id_{U_\alpha} \times j} & U_\alpha \times K^n \\ \psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi_\alpha \\ E' |_{U_\alpha} & \xrightarrow{i} & E |_{U_\alpha} \end{array}$$

commuta, dove $j : K^q \rightarrow K^n$ è l'immersione.

Esempio 1.3.3 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ . Ricordiamo che lo spazio tangente ad M in un suo punto fissato P , può essere visto come l'insieme delle derivazioni dell'anello dei germi di funzioni di M in P . Data $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ applicazione \mathcal{C}^∞ definiamo

$$d_P f : T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

come

$$(d_P f)(D) = Df.$$

Si ha che l'applicazione df che ad ogni $P \in M$ associa $d_P f$ è una sezione del fibrato cotangente. Infatti $d_P f$, per la linearità delle derivazioni, è un'applicazione lineare da $T_P M$ a \mathbb{R} , quindi $d_P f$ appartiene a $T_P^* M$. Inoltre sulla carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ di M , si ha che:

$$d_P f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i^\alpha}(\varphi_\alpha(P)),$$

dove n è la dimensione di M e $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ sono coordinate locali indotte da φ_α . Quindi df è \mathcal{C}^∞ , il che dimostra che df è una sezione. Come caso

particolare, indichiamo con $dx_i^\alpha = d(\pi_i \varphi_\alpha)$, dove π_i è la proiezione sull' i -esimo fattore di \mathbb{R}^n allora $dx_1^\alpha, \dots, dx_n^\alpha$ sono ovviamente una n di sezioni ovunque indipendenti su U_α .

Osservazione 1.3.2 Sia M è una varietà \mathcal{C}^∞ di dimensione n e sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ è un atlante su M . Allora se indichiamo con $\underline{x}^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ le coordinate locali su U_α indotte da φ_α , dall'esempio precedente si desume che una rappresentazione coordinata del fibrato cotangente a M è $\{U_\alpha, \varphi_\alpha^*\}$, dove

$$\varphi_\alpha^* : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

è definita da

$$\varphi_\alpha^*(\underline{x}^\alpha, \sum_{i=1}^n v_i e_i) = \sum_{i=1}^n v_i dx_i^\alpha.$$

Esempio 1.3.4 Consideriamo il fibrato tangente alla circonferenza $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, questo ammette una sezione mai nulla che è (vedi figura 1):

$$s(x_1, x_2) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1)) \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in S^1$$

e quindi S^1 è parallelizzabile. Analogamente il fibrato tangente alla 3-sfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ammette tre sezioni ovunque indipendenti $s_i(x) = (x, \bar{s}_i(x))$ per $i = 1, 2, 3$ dove

$$\begin{aligned} \bar{s}_1(x) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \\ \bar{s}_2(x) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2) \\ \bar{s}_3(x) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

Quindi S^3 è parallelizzabile.

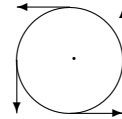


figura 1

1.4 Metriche e orientazioni

Definizione 1.4.1 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n . Si ha che $\Lambda^n \xi^*$ è un fibrato vettoriale di rango uno. Diremo che ξ è orientabile se esiste $\Delta \in \text{Sec}(\Lambda^n \xi^*)$ tale che $\Delta(x) \neq 0$ per ogni $x \in B$. Una tale sezione è detta funzione determinante di ξ .

Se Δ_1 e Δ_2 sono due funzioni determinanti di ξ , c'è un'unica $f \in S(B)$ tale che $\Delta_1 = f \cdot \Delta_2$. Quest'ultima relazione implica che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in B$; perciò si può definire una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni determinanti su ξ nel seguente modo:

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in B.$$

Una classe di equivalenza è un'orientazione di ξ . Infine se è data una tale classe, il fibrato vettoriale è detto orientato e gli elementi dell'orientazione sono detti positivi.

Osservazione 1.4.1 Si osservi che, per il teorema 1.3.1, un fibrato vettoriale ξ di rango r è orientabile se e solo se $\Lambda^r \xi^*$ è banale.

Proposizione 1.4.1 Un fibrato vettoriale $\xi = (E, \pi, B)$ è orientabile se e solo se ammette una rappresentazione coordinata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ le cui trasformazioni coordinate $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}$ abbiano determinante positivo. Una tale rappresentazione coordinata viene detta orientata.

Dimostrazione. Supponiamo ξ orientabile e sia Δ un'orientazione per ξ . Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata tale che gli aperti U_α siano connessi. Sia inoltre fissata un'orientazione Ω di K^n (dove n è il rango di ξ). Poiché gli aperti U_α sono connessi, si ha che, per ogni α , le applicazioni lineari $\varphi_{\alpha,x} : K^n \rightarrow \xi_x$ o conservano o invertono l'orientazione. Sia ρ un isomorfismo di K^n che inverte l'orientazione e definiamo una rappresentazione coordinata per ξ nel seguente modo:

$$\psi_\alpha(x, y) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x, y) & \text{se } \varphi_{\alpha,x} \text{ conserva l'orientazione} \\ \varphi_\alpha(x, \rho(y)) & \text{se } \varphi_{\alpha,x} \text{ inverte l'orientazione.} \end{cases}$$

Quindi ogni $\psi_{\alpha,x}$ conserva l'orientazione e di conseguenza anche le trasformazioni coordinate associate $\psi_{\alpha,x}^{-1} \psi_{\beta,x}$ conservano l'orientazione, perciò hanno determinante positivo.

Viceversa, supponiamo che $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ sia una rappresentazione coordinata per ξ le cui trasformazioni coordinate abbiano determinante positivo. Sia Ω un'orientazione di K^n e definiamo $\Delta_\alpha \in A^n(\xi|_{U_\alpha})$ come

$$\Delta_{\alpha,x}(z_1, \dots, z_n) = \Omega(\varphi_{\alpha,x}^{-1}(z_1), \dots, \varphi_{\alpha,x}^{-1}(z_n)).$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\Delta_{\alpha,x}(z_1, \dots, z_n) = \det(\varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}) \Delta_{\beta,x}(z_1, \dots, z_n)$$

con $x \in B$, $z_i \in \xi_i$, per $i = 1, \dots, n$.

Supponiamo che il ricoprimento $\{U_\alpha\}$ sia localmente finito, e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento (per l'esistenza di una partizione dell'unità subordinata ad un dato ricoprimento aperto localmente finito vedi [Rh], pag.3). Sia $\Delta \in Sec(\Lambda^n \xi^*)$ la sezione definita da:

$$\Delta_x(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) \Delta_{\alpha,x}(z_1, \dots, z_n)$$

con $x \in B$ e $z_i \in \xi_i$, per $i = 1, \dots, n$. Si ha che $\Delta(x) \neq 0$ per ogni $x \in B$, quindi Δ è un'orientazione per ξ e in particolare ξ è orientabile. \square

Esempio 1.4.1 Siano ξ^1 e ξ^2 due fibrati vettoriali orientati sulla stessa base B di rango rispettivamente n_1 e n_2 e siano $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ rappresentazioni coordinate per ξ_1 e ξ_2 (eventualmente passando ad un raffinamento si può supporre che il ricoprimento di B sia lo stesso), allora la rappresentazione coordinata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha\}$ di $\xi^1 \oplus \xi^2$ è orientata. Infatti, fissato $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, sia $(y, y') \in K^{n_1+n_2}$ allora si ha

$$(\varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha)_x^{-1}(\varphi_\beta \oplus \psi_\beta)_x(y, y') = (\varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}(y), \psi_{\alpha,x}^{-1} \psi_{\beta,x}(y)),$$

quindi

$$(\varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha)_x^{-1}(\varphi_\beta \oplus \psi_\beta)_x = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & f_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

dove $g_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ sono le trasformazioni coordinate associate rispettivamente alla rappresentazione coordinata di ξ_1 e ξ_2 . Quindi si ha

$$\det((\varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha)_x^{-1}(\varphi_\beta \oplus \psi_\beta)_x) = (\det g_{\alpha\beta})(\det f_{\alpha\beta}) > 0,$$

perciò la rappresentazione coordinata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha\}$ è orientata e induce un'orientazione su $\xi_1 \oplus \xi_2$ detta orientazione canonica della somma di Whitney.

Esempio 1.4.2 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n e sia $\xi' = (E', \pi', B)$ un sottofibrato di ξ di rango q . Consideriamo il fibrato quoziente $\frac{\xi}{\xi'}$ vedi punto 6 paragrafo 1.2. Abbiamo visto che se $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ e $\{U_\alpha, \theta_\alpha\}$ sono rappresentazioni coordinate per, rispettivamente, ξ , ξ' e $\frac{\xi}{\xi'}$, allora rispetto ad opportune basi si ha che

$$\varphi_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha,x} & * \\ 0 & \theta_{\alpha,x} \end{pmatrix},$$

dove abbiamo identificato l'applicazione con la matrice che la rappresenta. Si verifica facilmente che

$$\varphi_{\alpha,x}^{-1} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha,x}^{-1} & * \\ 0 & \theta_{\alpha,x}^{-1} \end{pmatrix}$$

e

$$\varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha,x}^{-1} \psi_{\beta,x} & * \\ 0 & \theta_{\alpha,x}^{-1} \theta_{\beta,x} \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det(\varphi_{\alpha,x}^{-1} \varphi_{\beta,x}) = \det(\psi_{\alpha,x}^{-1} \psi_{\beta,x}) \det(\theta_{\alpha,x}^{-1} \theta_{\beta,x}).$$

Perciò fissando un'orientazione su due fibrati tra ξ , ξ' e $\frac{\xi}{\xi'}$ si induce un'orientazione sul terzo. In particolare se ξ e ξ' sono orientabili anche il fibrato quoziente lo è.

Osservazione 1.4.2 Se $\psi : \xi \rightarrow \eta$ è un'applicazione di fibrati che induce isomorfismi lineari sulle fibre (e induce $\psi_B : B \rightarrow B'$ sulle basi), allora un'orientazione di η induce un'orientazione su ξ . Infatti, sia Δ_η un'orientazione di η , poniamo

$$\Delta_\xi = \psi^* \Delta_\eta$$

dove $\psi^* \Delta_\eta \in \text{Sec}(\Lambda^r \xi^*)$, con r uguale al rango di ξ , è così definita

$$\psi^* \Delta_\eta(x) = \Lambda^r \psi^{-1}(\Delta_\eta(\psi_B(x))).$$

Si ha che $\Delta_\xi \neq 0$ per ogni $x \in B$, perciò Δ_ξ orienta ξ .

Definizione 1.4.2 Un fibrato vettoriale Riemanniano è un fibrato vettoriale reale $\xi = (E, \pi, B)$ insieme a un elemento $g \in S^2(\xi)$ tale che le forme bilineari $g(x)$ sono definite positive per ogni $x \in B$; g è detta metrica Riemanniana sul fibrato ξ . Una sezione s di un fibrato vettoriale Riemanniano è detta normale se

$$g_x(s(x), s(x)) = 1 \text{ per ogni } x \in B.$$

Proposizione 1.4.2 *Ogni fibrato vettoriale $\xi = (E, \pi, B)$ di rango n ammette una metrica Riemanniana. Inoltre si può scegliere la rappresentazione coordinata in modo che le trasformazioni ad essa associate assumano valori in O_n . Una tale rappresentazione coordinata è detta rappresentazione coordinata Riemanniana.*

Dimostrazione. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto localmente finito per B che trivializza E . Su ogni U_α scegliamo n sezioni $s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha$ ovunque indipendenti e dichiariamo che sono ortonormali. Questo definisce una metrica Riemanniana g_α su $\xi|_{U_\alpha}$. Ora consideriamo una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata a $\{U_\alpha\}$ e definiamo una metrica Riemanniana g su ξ nel seguente modo:

$$g = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} g_{\alpha},$$

dove poniamo $g_{\alpha}(x) = 0$ se x non appartiene ad U_{α} . Nonostante questa definizione, si ha che g è definita positiva perché $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(x) = 1$.

Fissato α , costruiamo a partire dalla base $(s_1^\alpha(x), \dots, s_n^\alpha(x))$ di ξ_x , tramite il procedimento di Gram-Schmidt, una base $(p_1^\alpha(x), \dots, p_n^\alpha(x))$ ortonormale rispetto a $g|_{U_\alpha}$. Poiché

$$p_i^\alpha(x) = g(w_i(x), w_i(x))^{-\frac{1}{2}} w_i(x),$$

dove

$$w_i(x) = s_i^\alpha(x) - \sum_{j=1}^{i-1} g(s_i^\alpha(x), p_j^\alpha(x)) p_j^\alpha(x),$$

la nuova base dipende in modo C^∞ da quella di partenza, quindi una rappresentazione coordinata per ξ è data da $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$, dove

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\rightarrow E|_{U_\alpha} \\ \psi_\alpha(x, \sum_{i=1}^n y_i e_i) &= \sum_{i=1}^n y_i p_i^\alpha(x) \end{aligned}$$

con (e_1, \dots, e_n) base ortonormale di \mathbb{R}^n . In questo modo le applicazioni $\psi_{\alpha,x}$ sono isometrie, quindi le trasformazioni coordinate ad esse associate assumono valore in $O^n \subset GL_n(\mathbb{R})$. \square

Osservazione 1.4.3 Sia ξ un fibrato Riemanniano orientabile. Se prendiamo in esame la dimostrazione della proposizione 1.4.1, osserviamo che è possibile, partendo da una rappresentazione coordinata Riemanniana e scegliendo opportunamente il ρ di tale dimostrazione, ottenere una rappresentazione coordinata orientata e ancora Riemanniana. In altre parole un fibrato vettoriale è orientabile se e solo se ammette una rappresentazione coordinata le cui trasformazioni associate assumano valori in SO^n .

Osservazione 1.4.4 Sia (ξ, g) un fibrato vettoriale Riemanniano con base B . La metrica g induce una metrica g^* su ξ^* nel seguente modo:

$$g_x^*(v_1, v_2) = g_x(\bar{g}_x^{-1}(v_1), \bar{g}_x^{-1}(v_2))$$

con $x \in B$, $v_1, v_2 \in \xi_x^*$ e dove

$$\bar{g}_x : \xi_x \rightarrow \xi_x^*$$

è l'isomorfismo lineare così definito

$$\bar{g}_x(v)(w) = g(v, w)$$

con $v, w \in \xi_x$. Inoltre la metrica g induce una metrica $\Lambda^p g$ su $\Lambda^p \xi$, nel modo seguente

$$\begin{aligned} \Lambda^p g_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) g_x(v_1, w_{\sigma(1)}) \cdots g_x(v_p, w_{\sigma(p)}) \\ &= \det([g(v_i, w_j)]), \end{aligned}$$

dove $x \in B$, $(v_1, \dots, v_p), (w_1, \dots, w_p) \in \xi_x$ e S_p è il gruppo delle permutazioni su p elementi.

Definizione 1.4.3 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato Riemanniano orientato di rango n , allora il fibrato vettoriale $\Lambda^n \xi^*$ ha rango uno e quindi c'è un'unica sezione normale $\Delta \in \text{Sec}(\Lambda^n \xi^*)$ positiva rispetto all'orientazione di ξ . La sezione Δ è detta la funzione determinante positiva e normale di ξ .

Un discorso analogo a quello fatto per la metrica Riemanniana di un fibrato vettoriale reale, si può fare per i fibrati vettoriali complessi:

Definizione 1.4.4 (1) Dato un fibrato vettoriale complesso $\xi = (E, \pi, B)$ di rango r , indichiamo con $\xi_{\mathbb{R}}$ il fibrato vettoriale reale di dimensione $2r$ che si ottiene da ξ dimenticando la struttura complessa.

(2) Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale complesso. Una metrica Hermitiana g su ξ è un elemento $g \in \text{Hom}(\xi_{\mathbb{R}}, \xi_{\mathbb{R}}; B \times \mathbb{C})$ tale che $g(x)$ è una metrica Hermitiana nello spazio vettoriale complesso ξ_x per ogni $x \in B$.

In un modo del tutto analogo a quanto fatto per la metrica Riemanniana si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 1.4.3 *Una metrica Hermitiana può essere introdotta in ogni fibrato vettoriale complesso. Se (ξ, g) è un fibrato vettoriale Hermitiano, esiste una rappresentazione coordinata per ξ le cui trasformazioni coordinate associate assumono valori in U_n (dove n è il rango di ξ).*

Osservazione 1.4.5 Sia ξ un fibrato vettoriale complesso di rango 1. Allora $\xi_{\mathbb{R}}$ ha un'orientazione naturale definita come segue. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata per ξ e siano $g_{\alpha\beta}$ le trasformazioni coordinate associate. Si ha

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \tau_x,$$

dove τ_x consiste semplicemente nella moltiplicazione per il numero complesso τ_x . Consideriamo ora $\xi_{\mathbb{R}}$, una rappresentazione coordinata per $\xi_{\mathbb{R}}$ sarà $\{U_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ dove

$$\varphi'_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

è definita da

$$\varphi'_\alpha(x, (u, v)) = \varphi_\alpha(x, u + v).$$

Allora le trasformazioni coordinate associate a questa rappresentazione sono

$$g'_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} \Re(\tau_x) & -\Im(\tau_x) \\ \Im(\tau_x) & \Re(\tau_x) \end{pmatrix},$$

che è una matrice a determinate positivo, quindi $\{U_\alpha, \varphi'_\alpha\}$ è una rappresentazione coordinata orientata su $\xi_{\mathbb{R}}$.

In modo analogo si ha un orientazione naturale su $\xi_{\mathbb{R}}$, quando ξ è un fibrato vettoriale complesso di rango qualsiasi.

Richiamiamo ora alcune nozioni riguardanti l'omotopia.

Definizione 1.4.5 Siano M e N due spazi topologici e siano f e g due applicazioni tra M e N , allora si dice che f e g sono omotope in senso continuo se esiste un'applicazione continua

$$F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$$

tale che

$$F|_{M \times \{0\}} = f \quad \text{e} \quad F|_{M \times \{1\}} = g. \quad (1.4.1)$$

L'applicazione F è detta un'omotopia tra f e g .

Definizione 1.4.6 Siano M e N due varietà \mathcal{C}^∞ e siano f e g due applicazioni \mathcal{C}^∞ tra M e N , allora si dice che f e g sono omotope in senso \mathcal{C}^∞ se esiste un'omotopia $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tra f e g e F è \mathcal{C}^∞ .

In realtà se f e g sono due applicazioni \mathcal{C}^∞ tra varietà \mathcal{C}^∞ , i due concetti coincidono, cioè f e g sono omotope in senso continuo se e solo se lo sono in senso \mathcal{C}^∞ . La dimostrazione di questo fatto è analoga alla dimostrazione della proposizione 17.8, pag.213, [B-T].

Definizione 1.4.7 Siano M e N due varietà \mathcal{C}^∞ . Si dice che M e N hanno lo stesso tipo di omotopia se esistono due applicazioni \mathcal{C}^∞ $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow M$ tali che gf e fg sono omotope rispettivamente a id_M e id_N . Una varietà con lo stesso tipo di omotopia di un punto si dice contraibile.

Definizione 1.4.8 Un'applicazione $r : M \rightarrow A \subset M$ è detta retrazione se $r|_A = id_A$ o, equivalentemente, se $i : A \hookrightarrow M$ è la mappa di inclusione, se $ri = id_A$. Se in più $ir : M \rightarrow M$ è omotopa all'identità su M , allora si dice che A è un retratto per deformazione di M . In tal caso M e A hanno lo stesso tipo di omotopia.

Osservazione 1.4.6 Siano M e N due varietà \mathcal{C}^∞ e siano $f, g : M \rightarrow N$ due funzioni \mathcal{C}^∞ . È equivalente definire un'omotopia tra f e g come sopra oppure come un'applicazione $F : M \times I \rightarrow N$ che soddisfa la formula (1.4.1) (dove I è l'intervallo $[0, 1]$). Questo perché se F è definita su $M \times \mathbb{R}$, basta considerare la sua restrizione a I , viceversa se F è definita su $M \times I$ basta estenderla a tutto $M \times \mathbb{R}$ tramite

$$F(x, t) = F(x, 0) \quad \text{se } t < 0$$

e

$$F(x, t) = F(x, 1) \quad \text{se } t > 1.$$

Teorema 1.4.1 *Siano Y e X due varietà con Y compatta. Se f_0 e f_1 sono mappe omotope da Y a X e ξ è un fibrato vettoriale su X , allora $f_0^*\xi$ e $f_1^*\xi$ sono fibrati isomorfi. In altre parole mappe omotope inducono fibrati isomorfi.*

Dimostrazione. Dati due fibrati vettoriali ξ e η definiamo $Iso(\xi; \eta)$ come il sottofibrato di $\text{Hom}(\xi; \eta)$ la cui fibra nel punto x è l'insieme degli isomorfismi da ξ_x a η_x . Un isomorfismo tra ξ e η è una sezione di $Iso(\xi; \eta)$.

Sia $F : Y \times I \rightarrow X$ l'omotopia tra f_0 e f_1 , e sia $\pi : Y \times I \rightarrow Y$ la proiezione sul primo fattore. Supponiamo che per un certo $t_0 \in I$, $F_{t_0}^*\xi$ sia isomorfo ad un qualche fibrato vettoriale η su Y . Faremo vedere che per ogni $t \in I$ abbastanza vicino a t_0 , si ha che $F_t^*\xi \cong \eta$. Per la connessione di I se ne desume che $F_t^*\xi \cong \eta$ per ogni $t \in I$.

Su $Y \times I$ ci sono due fibrati derivanti da pull-back, $F^*\xi$ e $\pi^*\eta$. Poiché $F_{t_0}^*\xi \cong \eta$, il fibrato $Iso(F^*\xi; \pi^*\eta)$ ha una sezione s su $Y \times \{t_0\}$, che a priori è anche una sezione di $\text{Hom}(F^*\xi; \pi^*\eta)$. Poiché Y è compatto, $Y \times \{t_0\}$ può essere ricoperto con un numero finito di insiemi aperti $\{U_i\}$ banalizzanti per $\text{Hom}(F^*\xi; \pi^*\eta)$ (vedi la figura 2). Siccome le fibre di $\text{Hom}(F^*\xi; \pi^*\eta)$ sono spazi euclidei, la restrizione di s a $U_i \cap (Y \times \{t_0\})$ può essere estesa ad una sezione s_i su U_i . Considero una partizione dell'unità $\{\rho_i\}$ associata a $\{U_i\}$, allora $\sum_i s_i \rho_i$ è una sezione di $\text{Hom}(F^*\xi; \pi^*\eta)$ sull'unione degli aperti $\{U_i\}$. Ora ogni applicazione lineare vicina ad un isomorfismo, rimane un isomorfismo; quindi possiamo estendere la sezione data di $Iso(F^*\xi; \pi^*\eta)$ ad una striscia contenente $Y \times \{t_0\}$. Questo prova che $F_t^*\xi \cong \eta$ per t vicino a t_0 . Ora possiamo coprire $Y \times I$ con un numero finito di strisce, in tal modo otteniamo che

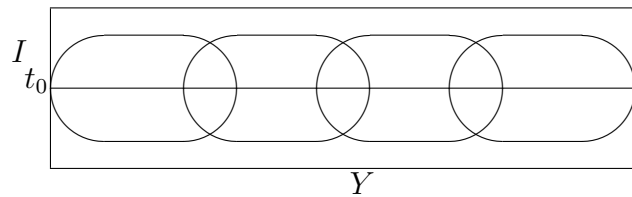


figura 2

$$f_0^*\xi = F_0^*\xi \cong \eta \cong F_1^*\xi = f_1^*\xi. \quad \square$$

Osservazione 1.4.7 Il teorema continua a valere anche supponendo Y paracompatto. Per referenze guardare [Hu], pag.29, teorema 4.7.

Corollario 1.4.1 *Un fibrato vettoriale ξ su una varietà contraibile B è banale.*

Dimostrazione. Poiché la varietà B è contraibile, cioè è omotopa ad un punto P , esistono due mappe f e g tali che

$$B \xrightarrow[g]{f} P$$

tale che gf è omotopo all'identità 1_M . Per il teorema 1.4.1 si ha che:

$$\xi \cong (gf)^*\xi \cong f^*(g^*\xi).$$

Poiché $g^*\xi$ è un fibrato su un punto, è banale, quindi anche $f^*(g^*\xi)$ è banale. \square

2 Coomologia di De Rham

2.1 Richiami algebrici

Iniziamo questo capitolo richiamando alcune nozioni algebriche riguardanti i complessi di catene e la coomologia ad essi associata, di cui il complesso e la coomologia di De Rham sono un esempio particolare.

Quasi tutte le dimostrazioni dei teoremi e delle proposizioni di questo paragrafo sono omesse, per referenze a riguardo si può consultare [Gr2].

Definizione 2.1.1 *Un complesso di catene $C^\bullet = (\oplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k, d)$ è costituito da una somma diretta di gruppi, $\oplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$, e da un omomorfismo, detto omomorfismo (o operatore) di bordo $d : \oplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k \rightarrow \oplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$ tale che $d(C^k) \subset C^{k+1}$ e $d^2 = 0$. Gli elementi di C^k sono detti k -catene. Definiamo la coomologia di un complesso di catene C^\bullet , come la somma diretta dei gruppi $H(C^\bullet) = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(C)$, dove*

$$H^k(C) = \frac{\ker d \cap C^k}{\text{im } d \cap C^k}.$$

Osservazione 2.1.1 La definizione di coomologia è ben posta perché dal fatto che $d^2 = 0$, segue che, ad ogni livello, l'immagine di d è contenuta nel nucleo di d .

Definizione 2.1.2 *Dati $A^\bullet = (\oplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k, d_A)$ e $B^\bullet = (\oplus_{k \in \mathbb{Z}} B^k, d_B)$ complessi di catene, un omomorfismo di catene $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ è una successione di omomorfismi $f_k : A^k \rightarrow B^k$, con $k \in \mathbb{Z}$ tale che $d_B f_k = f_{k+1} d_A$.*

Una mappa di catene induce omomorfismi

$$H^k f : H^k(A) \rightarrow H^k(B)$$

definiti da:

$$H^k f([\alpha]) = [f_k \alpha].$$

Osservazione 2.1.2 *Data $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ mappa di catene, la definizione di $H^k f$ è ben posta; infatti, se $\alpha \in \ker d_A \cap A^k$ si ha che:*

$$d_B f_k(\alpha) = f_{k+1}(d_A \alpha) = f_{k+1}(0) = 0,$$

quindi esiste $[f_k(\alpha)] \in H^k(B)$. Inoltre siano $\alpha, \alpha' \in \ker d_A \cap A^k$ tali che $[\alpha'] = [\alpha]$, allora esiste $\eta \in A^{k-1}$ tale che $\alpha = \alpha' + d_A\eta$ e si ha:

$$\begin{aligned} H^k f([\alpha]) &= [f_k(\alpha)] \\ &= [f_k(\alpha' + d_A\eta)] \\ &= [f_k(\alpha')] + [f_k(d_A\eta)] \\ &= H^k f([\alpha']) + [d_B f_{k-1}(\eta)] \\ &= H^k f([\alpha']). \end{aligned}$$

Osservazione 2.1.3 Si ha che H^k è un funtore covariante dalla categoria dei complessi e mappe di catene, alla categoria dei gruppi e loro omomorfismi.

Definizione 2.1.3 Un omomorfismo di catene f è detto un isomorfismo se f_k è un isomorfismo per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione 2.1.4 Siano A^\bullet e B^\bullet due complessi di catene con operatori rispettivamente d_A e d_B e siano $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ due omomorfismi di catene. Un'omotopia di catene da f a g è un omomorfismo di catene $H : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ tale che $H(A^k) \subset B^{k-1}$ e $g - f = \pm(d_B H \pm H d_A)$. Se esiste un omotopia di catene da f a g , queste due applicazioni si dicono omotope.

Osservazione 2.1.4 Con le notazioni della definizione precedente, si ha che $H^k f = H^k g$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Infatti se $\alpha \in \ker d_A$ si ha

$$(d_B H \pm H d_A)(\alpha) = d_B(H\alpha),$$

cioè $d_B H \pm H d_A$ manda gli elementi del nucleo di d_A , nell'immagine di d_B e quindi induce la mappa nulla in coomologia. Perciò dalla relazione

$$g - f = \pm(d_B H \pm H d_A)$$

segue che $H^k f = H^k g$.

Definizione 2.1.5 Dati due complessi di catene A^\bullet e B^\bullet definiamo il complesso di catene $A^\bullet \oplus B^\bullet$ come $(\oplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^k \oplus B^k), d_{A \oplus B})$, dove l'operatore di bordo

$$d_{A \oplus B} : \oplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^k \oplus B^k) \rightarrow \oplus_{k \in \mathbb{Z}} (A^k \oplus B^k)$$

è definito da

$$d_{A \oplus B}(a, b) = (d_A a, d_B b).$$

È ovvio che $d_{A\oplus B}(A^k \oplus B^k) \subset A^{k+1} \oplus B^{k+1}$, inoltre:

$$(d_{A\oplus B})^2(a, b) = ((d_A)^2a, (d_B)^2b) = (0, 0).$$

Quindi $A^\bullet \oplus B^\bullet$ è in effetti un complesso di catene.

Per come è definito $d_{A\oplus B}$, si ha che

$$\ker d_{A\oplus B} = \ker d_A \oplus \ker d_B$$

$$\operatorname{im} d_{A\oplus B} = \operatorname{im} d_A \oplus \operatorname{im} d_B,$$

quindi si ottiene $H(A^\bullet \oplus B^\bullet) = H(A^\bullet) \oplus H(B^\bullet)$.

Analogamente dati n -complessi $C_1^\bullet, \dots, C_n^\bullet$, definiamo per ricorrenza la somma diretta di n complessi come il complesso:

$$\bigoplus_{i=1}^n C_i^\bullet = (C_n^\bullet) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n-1} C_i^\bullet).$$

Inoltre si ha $H(\bigoplus_{i=1}^n C_i^\bullet) = \bigoplus_{i=1}^n H(C_i^\bullet)$.

Definizione 2.1.6 Una successione esatta è una successione di gruppi abeliani con omomorfismi del tipo:

$$\dots \xrightarrow{\alpha_{k-2}} A^{k-1} \xrightarrow{\alpha_{k-1}} A^k \xrightarrow{\alpha_k} A^{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \dots$$

tale che $\operatorname{im} \alpha_{k-1} = \ker \alpha_k$.

Una successione esatta illimitata da entrambi i lati è un complesso di catene con coomologia banale.

Definizione 2.1.7 Una successione esatta corta è una successione esatta del tipo:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

In questa situazione si ha che α è iniettiva, β è suriettiva e $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$.

Esempio 2.1.1 L'esempio più classico e ricorrente di successione esatta è il seguente: sia B un gruppo abeliano e sia A un suo sottogruppo. Definiamo $C = B/A$. Allora una successione esatta corta è data da:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

dove i è l'immersione e π è la proiezione sul quoziente.

In realtà tutte le successioni esatte corte possono essere ricondotte a questo caso. Infatti sia

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

una successione esatta corta e sia $A' = \text{im } \alpha = \ker \beta$. Allora $\alpha : A \rightarrow A'$ è un isomorfismo e β induce un isomorfismo $C \cong B/A'$. Inoltre il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow id_B & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commuta.

Definizione 2.1.8 *Una successione del tipo:*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{\alpha} B^\bullet \xrightarrow{\beta} C^\bullet \longrightarrow 0,$$

con $A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet$, complessi di catene e α e β omomorfismi di catene, è detta *successione esatta corta di complessi* se, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow A^k \xrightarrow{\alpha_k} B^k \xrightarrow{\beta_k} C^k \longrightarrow 0$$

è una successione esatta corta.

Teorema 2.1.1 *Data una successione esatta corta di complessi e mappe di catene $0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{\alpha} B^\bullet \xrightarrow{\beta} C^\bullet \longrightarrow 0$, vi è per ogni $n \in \mathbb{Z}$ un omomorfismo δ_n che rende esatta la successione:*

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{H^n \alpha} H^n(B) \xrightarrow{H^n \beta} H^n(C) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H^{n+1} \alpha} \dots$$

Generalmente si usa indicare δ_n semplicemente con δ . L'omomorfismo δ prende il nome di *omomorfismo di connessione*.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si basa sulla tecnica di inseguimento nei diagrammi. Illustreremo qui di seguito solo la costruzione dell'omomorfismo δ .

La successione esatta corta data si esplicita nel seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{\alpha} & B^n & \xrightarrow{\beta} & C^n & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow d_A & & \downarrow d_B & & \downarrow d_C & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A^{n+1} & \xrightarrow{\alpha} & B^{n+1} & \xrightarrow{\beta} & C^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow d_A & & \downarrow d_B & & \downarrow d_C & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A^{n+2} & \xrightarrow{\alpha} & B^{n+2} & \xrightarrow{\beta} & C^{n+2} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Definiamo δ_n per una generica classe $[c] \in H^n(C)$; si ha $c \in C^n$ e $d_C c = 0$. Per la suriettività di β , esiste $b \in B^n$ tale che $\beta(b) = c$. Ora dalla relazione, $d_C \beta = \beta d_B$, si ha

$$\beta d_B b = d_C \beta(b) = d_C c = 0$$

quindi $d_B b \in \ker \beta = \text{im } \alpha$; perciò per l'iniettività di α esiste un unico elemento $a \in A^{n+1}$ tale che $\alpha(a) = d_B b$, inoltre $0 = d_B \alpha(a) = \alpha(d_A a)$, che, ancora per l'iniettività di α , implica che $d_A a = 0$, cioè esiste $[a] \in H^{n+1}(A)$. Definisco quindi $\delta_n([c]) = [a]$. \square

Teorema 2.1.2 *Ad ogni diagramma commutativo di complessi a righe esatte*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^\bullet & \xrightarrow{\alpha} & B^\bullet & \xrightarrow{\beta} & C^\bullet & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow l & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \underline{A}^\bullet & \xrightarrow{\underline{\alpha}} & \underline{B}^\bullet & \xrightarrow{\underline{\beta}} & \underline{C}^\bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

corrisponde un diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & H^n(A) & \xrightarrow{H^n \alpha} & H^n(B) & \xrightarrow{H^n \beta} & H^n(C) & \xrightarrow{\delta_n} & H^{n+1}(A) & \dots \\
\downarrow H^n f & & & \downarrow H^n g & & \downarrow H^n l & & \downarrow H^{n+1} f & \\
\dots & H^n(\underline{A}) & \xrightarrow{H^n \underline{\alpha}} & H^n(\underline{B}) & \xrightarrow{H^n \underline{\beta}} & H^n(\underline{C}) & \xrightarrow{\delta_n} & H^{n+1}(\underline{A}) & \dots
\end{array}$$

Questo fatto si esprime dicendo che l'omomorfismo di connessione è canonico.

Proposizione 2.1.1 (Lemma dei cinque) *Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani e omomorfismi a righe esatto, come segue,*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\
 A' & \xrightarrow{g_1} & B' & \xrightarrow{g_2} & C' & \xrightarrow{g_3} & D' & \xrightarrow{g_4} & E'
 \end{array}$$

si ha:

1. se β e δ sono iniettivi e α è suriettivo allora γ è iniettivo,
2. se β e δ sono suriettivi e ϵ è iniettivo allora γ è suriettivo.

In particolare, se α, β, δ e ϵ sono isomorfismi anche γ lo è.

2.2 Complesso di De Rham

Definizione 2.2.1 *Sia M una varietà C^∞ . Una forma differenziale di grado p su M (o p -forma differenziale) è un elemento di $\text{Sec}(\Lambda^p T^*M)$. Indichiamo l'insieme delle p -forme differenziali su M con $\Omega^p(M)$. Data $\omega \in \Omega^p(M)$ si ha che $\omega_x = \omega(x)$, può essere vista come una funzione p -lineare antisimmetrica su T_x^*M , per ogni $x \in M$.*

Osservazione 2.2.1 Nelle ipotesi della definizione precedente, sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante per M e siano $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ coordinate locali su U_α , allora si ha che $(d_P x_1^\alpha, \dots, d_P x_n^\alpha)$ è una base per T_P^*M (con $P \in U_\alpha$) e

$$\{d_P x_{i_1}^\alpha \wedge \dots \wedge d_P x_{i_p}^\alpha \text{ con } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

è una base per $\Lambda^p T_P^*M$. Quindi, data $\omega \in \Omega^p(M)$, per ogni $P \in M$ esistono funzioni $\omega_{i_1 \dots i_p} \in S(U_\alpha)$ tali che

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1}^\alpha \wedge \dots \wedge dx_{i_p}^\alpha$$

su U_α (vedi dimostrazione del teorema 1.3.1).

Definizione 2.2.2 *Sia M una varietà C^∞ . Il prodotto esterno di due forme differenziali $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\phi \in \Omega^q(M)$, è definito come la forma differenziale $\omega \wedge \phi \in \Omega^{p+q}(M)$ data da:*

$$(\omega \wedge \phi)(x) = \omega_x \wedge \phi_x, \quad \text{con } x \in M.$$

Osservazione 2.2.2 Perché definizione precedente sia ben posta bisogna dimostrare che $\omega \wedge \phi$ è \mathcal{C}^∞ , ma questo diventa molto semplice scrivendo tutto in coordinate locali, infatti siano:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1}^\alpha \wedge \dots \wedge dx_{i_p}^\alpha$$

$$\phi = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} \phi_{j_1 \dots j_q} dx_{j_1}^\alpha \wedge \dots \wedge dx_{j_q}^\alpha$$

in coordinate locali. Si ha:

$$\omega \wedge \phi = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_p} \phi_{j_1 \dots j_q} dx_{i_1}^\alpha \wedge \dots \wedge dx_{i_p}^\alpha \wedge dx_{j_1}^\alpha \wedge \dots \wedge dx_{j_q}^\alpha$$

che è chiaramente \mathcal{C}^∞ .

Osservazione 2.2.3 (1) Date $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\phi \in \Omega^q(M)$ si ha che

$$\omega \wedge \phi = (-1)^{pq} \phi \wedge \omega$$

(2) Dato $U \subset M$ aperto, si ha un'applicazione

$$\Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U)$$

definita da

$$\omega \mapsto \omega|_U$$

dove

$$(\omega|_U)_x = \omega_x \in \Lambda^p T_x^* M = \Lambda^p T_x^* U$$

(perché $T_x^* M = T_x^* U$ per ogni $x \in U$).

Inoltre si ha

$$(\omega + \omega')|_U = \omega|_U + \omega'|_U$$

$$(\omega \wedge \phi)|_U = \omega|_U \wedge \phi|_U$$

per ogni $\omega, \omega' \in \Omega^p(M)$ e per ogni $\phi \in \Omega^q(M)$.

Teorema 2.2.1 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ . Per ogni aperto $U \subset M$ ed ogni $r \geq 0$ esiste un'unica funzione \mathbb{R} -lineare

$$d : \Omega^r(U) \rightarrow \Omega^{r+1}(U)$$

tale che:

1. per $r = 0$ l'operatore d è il differenziale di funzioni definito precedentemente (vedi esempio 1.3.3).
2. La funzione d è un operatore locale cioè: dati due aperti V, U tali che $V \subset U \subset M$ e data $\omega \in \Omega^r(U)$ si ha $(d\omega)|_V = d(\omega|_V)$.
3. Dati $f \in \Omega^0(U)$ e $\omega \in \Omega^r(U)$ si ha:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

(generalizzazione della regola di Leibniz).

4. Per ogni $\omega \in \Omega^r$ si ha $d(d\omega) = 0$.

Tale operatore sarà detto operatore differenziale.

Premettiamo alla dimostrazione il seguente risultato.

Lemma 2.2.1 *Sia d una funzione con le caratteristiche del teorema precedente. Si ha:*

$$d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}) = 0$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su r :

- Per l'ipotesi (4) si ha che $d(dx_{i_1}) = 0$.
- Consideriamo la r -forma $\omega = x_{i_1} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}}$, si ha:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x_{i_1} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}}) \\ &= dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}} + x_{i_1} d(dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}}) \\ &= dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}} \end{aligned}$$

perché per l'ipotesi induttiva si ha che $d(dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}}) = 0$. Quindi per l'ipotesi (4) si trova

$$0 = d(d\omega) = d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r+1}}). \quad \square$$

Dimostrazione del teorema 2.2.1 Supponiamo che una tale funzione esista e dimostriamo che è unica. Dimostriamolo inizialmente nel caso in cui

M abbia un sistema di coordinate globali. Data $\omega \in \Omega^r(U)$ con $U \subset M$ aperto, ω si esprime globalmente come

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} + \omega_{i_1 \dots i_r} d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \end{aligned}$$

per il lemma 2.2.1; in conclusione

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}. \quad (2.2.1)$$

Quindi l'operatore d è univocamente determinato perché $d(\omega_{i_1 \dots i_r})$ è il differenziale di funzioni (per l'ipotesi (1)), e quindi è univocamente determinato.

Ora sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante per M e siano d e d' due operatori che soddisfano le regole (1), ..., (4). Allora d e d' ristretti a U_α danno due operatori $d|_{U_\alpha}$ e $d'|_{U_\alpha}$ che soddisfano le regole (1), ..., (4). Inoltre per quanto dimostrato sopra si ha che $d|_{U_\alpha} = d'|_{U_\alpha}$. Sia ora $\omega \in \Omega^r(V)$ con $V \subset M$ aperto, si ha:

$$(d\omega)|_{U_\alpha \cap V} = d(\omega|_{U_\alpha \cap V}) = d'(\omega|_{U_\alpha \cap V}) = (d'\omega)|_{U_\alpha \cap V}.$$

Quindi $d\omega = d'\omega$ per ogni $\omega \in \Omega^r(U)$, (poiché gli U_α ricoprono M) che dimostra l'unicità dell'operatore differenziale.

Per l'esistenza, supponiamo che M abbia un sistema di coordinate globali e definiamo $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ con la formula (2.2.1). Dimostriamo che soddisfa le proprietà (1), ..., (4).

1. Per come è definito d è ovvio che per $r = 0$ è il solito differenziale di funzioni.

2. L'operatore d è locale perché il differenziale di funzioni è locale e anche il prodotto esterno lo è (vedi osservazione 2.2.3).

3. Dati $\omega \in \Omega^r(U)$ e $f \in \Omega^0(U)$ si ha:

$$\begin{aligned}
d(f\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(f\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (df)\omega_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\
&\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} f(d\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\
&= df \wedge \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) \\
&\quad + f \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d(\omega_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) \\
&= df \wedge \omega + f d(\omega).
\end{aligned}$$

4. Si ha:

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j < i} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\
&\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j > i} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\sum_{j < i} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j < i} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

per il teorema di Schwarz e per l'antisimmetria del prodotto esterno.

Sia ora $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante per M , su ogni U_α ho un sistema di coordinate globali e quindi su U_α esiste un unico operatore differenziale d_α , definito con la formula (2.2.1). Ora, per l'unicità dell'operatore differenziale, su $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha:

$$d_\alpha |_{U_\alpha \cap U_\beta} = d_\beta |_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Quindi possiamo definire l'operatore d su M come:

$$d\omega = d_\alpha\omega \quad \text{su } U_\alpha.$$

Tale operatore soddisfa ovviamente tutte le proprietà richieste ed è quindi l'operatore differenziale su M .

Concludiamo la dimostrazione osservando che per l'unicità dell'operatore differenziale, esso non dipende dalla scelta del sistema di coordinate. \square

Proposizione 2.2.1 *Sia M una varietà C^∞ e siano $\omega \in \Omega^r(M)$ e $\phi \in \Omega^s(M)$ due forme differenziali. Si ha:*

$$d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^r\omega \wedge d\phi. \quad (2.2.2)$$

Dimostrazione. Basta dimostrare la formula localmente, quindi possiamo assumere che M abbia un sistema di coordinate globali. Inoltre possiamo ridurci al caso in cui $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$ e $\phi = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s}$ per la bilinearità dell'espressione. Ora:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \phi) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &= gd(f) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &\quad + fd(g) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &= d(f) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &\quad + (-1)^r f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge d(g) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \\ &= d\omega \wedge \phi + (-1)^r\omega \wedge d\phi. \quad \square \end{aligned}$$

Definizione 2.2.3 *Dopo aver posto $\Omega^{-i}(M) = \{0\}$, per $i \in \mathbb{N}$, definiamo il complesso di De Rham relativo ad M come il complesso $(\Omega^\bullet(M), d)$ dove $\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Omega^i(M)$:*

$$\cdots \xrightarrow{d} \Omega^{i-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^i(M) \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{i+2}(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

Le forme differenziali che appartengono al nucleo di d sono dette chiuse, mentre quelle che stanno nell'immagine di d sono dette esatte.

Osservazione 2.2.4 *Sia M una varietà C^∞ di dimensione n . Si ha che $\Lambda^i T^*M = M \times \{0\}$ per $i > n$ e quindi $\Omega^i(M) = 0$ per $i > n$.*

Definizione 2.2.4 Sia M una varietà C^∞ . Il p -esimo gruppo di coomologia di De Rham su M è lo spazio vettoriale

$$H_{DR}^p(M) = \frac{\{p\text{-forme chiuse su } M\}}{\{p\text{-forme esatte su } M\}}.$$

Cioè la coomologia di De Rham è la coomologia relativa al complesso di De Rham. Per comodità scriveremo, quando questo non crei confusione, $H^p(M)$ invece di $H_{DR}^p(M)$. Infine si pone $H^\bullet(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^p(M)$.

Osservazione 2.2.5 Sia M una varietà C^∞ . L'applicazione bilineare che associa a due forme differenziali il loro prodotto esterno (vedi definizione 2.2.2), dà a $\Omega^\bullet(M)$ la struttura di algebra graduata anticommutativa.

Proposizione 2.2.2 Sia M una varietà C^∞ . L'applicazione bilineare che associa a due forme differenziali il loro prodotto esterno induce un prodotto in coomologia definito da:

$$[\omega] \cdot [\phi] = [\omega \wedge \phi] \in H^{p+q}(M),$$

con $[\omega] \in H^p(M)$ e $[\phi] \in H^q(M)$. Questo prodotto dà a $H^\bullet(M)$ la struttura di algebra graduata anticommutativa.

Dimostrazione. La prima cosa da verificare è che il prodotto definito sopra porta forme chiuse in forme chiuse, ma questo segue banalmente dalla formula (2.2.2). Ora basta far vedere che la definizione di prodotto data sopra è ben posta, cioè che se $[\omega] = [\omega']$ e $[\phi] = [\phi']$, vale

$$[\omega] \cdot [\phi] = [\omega'] \cdot [\phi'].$$

Poiché ω e ω' rappresentano la stessa classe in coomologia, esse differiscono per una forma esatta e lo stesso vale per ϕ e ϕ' , cioè

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + d\eta \\ \phi' &= \phi + d\mu. \end{aligned}$$

Si ha

$$\omega' \wedge \phi' = \omega \wedge \phi + (\omega \wedge d\mu + d\eta \wedge (\phi + d\mu)),$$

ma una facile verifica mostra che se poniamo $\omega \wedge d\mu + d\eta \wedge (\phi + d\mu) = \alpha$, vale

$$\alpha = d((-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \mu + \eta \wedge (\phi + d\mu))$$

e quindi che, essendo α esatta,

$$[\omega \wedge \phi] = [\omega' \wedge \phi'].$$

Si verifica facilmente attraverso le proprietà del prodotto esterno che $H^\bullet(M)$ con questo prodotto è un'algebra graduata anticommutativa. \square

Esempio 2.2.1 L'esempio più elementare di calcolo della coomologia si ha quando come varietà M prendiamo un punto P . Poiché $\dim\{P\} = 0$, l'unico gruppo di coomologia non nullo potrà essere quello di grado zero. Ora una 0-forma su $\{P\}$ è una funzione da $\{P\}$ ad \mathbb{R} ed è univocamente determinata dall'immagine di P cioè da un elemento di \mathbb{R} . Quindi, poiché tali funzioni sono tutte chiuse e nessuna è esatta, si ha che $H^0(\{P\}) = \mathbb{R}$.

Esempio 2.2.2 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ e sia q il numero delle sue componenti connesse. Si ha $H^0(M) = \mathbb{R}^q$. Poiché $H^{-1}(M)$ è uguale all'insieme nullo, anche l'insieme delle 0-forme esatte è nullo e quindi $H^0(M)$ non è altro che l'insieme delle 0-forme chiuse. Ma le 0-forme su M sono le sezioni di $\Lambda^0 T^*M = M \times \mathbb{R}$ e quindi sono le funzioni \mathcal{C}^∞ da M a \mathbb{R} . Di conseguenza le 0-forme chiuse sono le funzioni \mathcal{C}^∞ da M a \mathbb{R} con differenziale nullo, cioè le funzioni localmente costanti. Ora una funzione \mathcal{C}^∞ localmente costante su un insieme connesso è costante, quindi una 0-forma chiusa ristretta ad una componente connessa di M può essere individuata da una costante $c \in \mathbb{R}$. Perciò ogni 0-forma chiusa ω può essere espressa tramite q costanti $(c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{R}^q$ che individuano i valori assunti da ω nelle q componenti connesse di M . Quindi $H^0(M) = \mathbb{R}^q$.

Esempio 2.2.3 Calcoliamo la coomologia di \mathbb{R} . Dall'esempio precedente sappiamo che, essendo \mathbb{R} connesso, $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Inoltre $H^n(\mathbb{R}) = 0$ se $n > 1 = \dim \mathbb{R}$. Quindi ci rimane da calcolare solo $H^1(\mathbb{R})$. Chiaramente tutte le 1-forme su \mathbb{R} sono chiuse; inoltre sia $\omega = g(x)dx$ una 1-forma, allora prendendo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x) = \int_0^x g(u) du,$$

si trova che

$$df = g(x)dx.$$

Quindi ogni 1-forma su \mathbb{R} è esatta perciò $H^1(\mathbb{R}) = 0$.

Definizione 2.2.5 Siano M, N varietà C^∞ . Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ , allora f induce per ogni $P \in M$

$$(d_P f)^* : T_{f(P)}^* N \rightarrow T_P^* M$$

$$\sigma \mapsto \sigma f.$$

Definiamo

$$f^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$$

come:

$$f^* \omega(P) = (\Lambda^r(d_P f)^*)(\omega_{f(P)}).$$

L'applicazione f^* è detta pull-back di f .

Osservazione 2.2.6 Con le notazioni della definizione precedente si ha che per $r = 0$, ricordando che $\Lambda^0(d_P f)^* = id$, la definizione di pull-back sulle forme differenziali coincide con la definizione di pull-back sulle funzioni e cioè:

$$f^* \omega = \omega f.$$

Osservazione 2.2.7 Dato $\omega \in \Omega^r(N)$ calcoliamo $f^* \omega$ in coordinate locali. Innanzitutto se $\omega = dx_i$ (con i fissato) si ha

$$f^* dx_i(P) = \Lambda^1(d_P f)^*(d_{f(P)} x_i) = d_{f(P)} x_i d_P f = d_P(x_i f) = d_P f_i,$$

quindi

$$f^* dx_i = df_i. \quad (2.2.3)$$

Inoltre f^* è lineare rispetto alla moltiplicazione per funzioni, cioè assegnate $\omega \in \Omega^r(N)$ e $g \in \Omega^0(N)$ si ha:

$$f^*(g\omega) = f^* g f^* \omega. \quad (2.2.4)$$

Infine vale:

$$f^*(\omega \wedge \phi) = f^* \omega \wedge f^* \phi, \quad (2.2.5)$$

segue immediatamente dal fatto che, dati due spazi vettoriali V e W e una funzione lineare $T : V \rightarrow W$, si ha $\Lambda^{r+s} T(\alpha \wedge \beta) = \Lambda^r T(\alpha) \wedge \Lambda^s T(\beta)$ con $\alpha \in \Lambda^r V$ e $\beta \in \Lambda^s V$.

Sia ora data una r -forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

in coordinate locali. Per le formule (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), si ha:

$$f^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (\omega_{i_1 \dots i_r} f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}.$$

Scritto in coordinate locali, risulta evidente che $f^* \omega$ è \mathcal{C}^∞ e quindi è in effetti una forma differenziale, cioè la definizione di pull-back è ben posta.

Proposizione 2.2.3 *La mappa di pull-back sulle forme differenziali commuta con l'operatore d .*

Dimostrazione. L'operatore differenziale e la mappa di pull-back sono lineari, quindi è sufficiente dimostrare che vale

$$d(f^* \omega) = f^*(d\omega),$$

dove ω è una r -forma differenziale del tipo

$$\omega = g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Per la formula precedente si ha:

$$d(f^* \omega) = d(gf df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}) = d(gf) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} f^* d\omega &= f^* \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} f \right) df_j \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r} \\ &= d(gf) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r}. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2.2.8 Una cosa molto importante da osservare è che data un'applicazione \mathcal{C}^∞ tra varietà $f : M \rightarrow N$, per la formula 2.2.5,

$$f^* : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(N)$$

e

$$Hf^* : H^\bullet(M) \rightarrow H^\bullet(N)$$

sono omomorfismi di algebre.

Proposizione 2.2.4 (1) Siano M , N e T varietà C^∞ e $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow T$ applicazioni C^∞ . Allora vale

$$(gf)^* = f^*g^*.$$

(2) Si ha $id_M^* = id_{\Omega^\bullet(M)}$.

In altre parole se indichiamo con Ω l'applicazione che associa ad una varietà C^∞ il complesso $\Omega^\bullet(M)$ e ad una funzione C^∞ f l'omomorfismo di complessi f^* , si ha che Ω è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà e applicazioni C^∞ alla categoria delle algebre graduate e loro omomorfismi.

Dimostrazione. (1) Data $\omega \in \Omega^r(T)$ e $x \in M$ si ha:

$$\begin{aligned} (gf)^*\omega(x) &= \Lambda^r(d_x gf)^*(\omega(gf(x))) \\ &= \Lambda^r(d_{f(x)}g \ d_x f)^*(\omega(gf(x))) \\ &= \Lambda^r((d_x f)^*(d_{f(x)}g)^*)(\omega(gf(x))) \\ &= (\Lambda^r(d_x f)^*)(\Lambda^r(d_{f(x)}g)^*)(\omega(gf(x))) \\ &= f^*g^*\omega(x). \end{aligned}$$

(2) Basta osservare che $d_P id_M = id_{T_P(M)}$ e in generale la k -esima potenza esterna dell'identità su uno spazio vettoriale V è l'identità su $\Lambda^k V$. \square

Proposizione 2.2.5 Siano M e N due varietà C^∞ e sia $f : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo. Allora $H^\bullet(M) \cong H^\bullet(N)$.

Dimostrazione. Basta osservare che, per la funtorialità di Ω e H^k , f e f^{-1} inducono isomorfismi inversi $H^k f^*$ e $H^k (f^{-1})^*$ tra $H^k(M)$ e $H^k(N)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Proposizione 2.2.6 Sia M una varietà C^∞ tale che M è l'unione disgiunta degli aperti M_α , con α che varia su un insieme finito. Allora si ha:

$$H^\bullet(M) \cong \bigoplus_\alpha H^\bullet(M_\alpha).$$

Dimostrazione. Poiché d è un operatore locale e per l'osservazione 2.2.3 punto (2), per ogni α c'è un omomorfismo di catene

$$i_\alpha : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M_\alpha)$$

definito da

$$i_\alpha(\omega) = \omega |_{M_\alpha} .$$

Dato il complesso $\bigoplus_\alpha \Omega^\bullet(M_\alpha)$, (vedi definizione 2.1.5), definiamo l'omomorfismo di catene

$$i : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \bigoplus_\alpha \Omega^\bullet(M_\alpha)$$

come

$$(i(\omega))_\alpha = i_\alpha(\omega).$$

Chiaramente i è un'isomorfismo di complessi e quindi, per la funtorialità di H^k , induce un isomorfismo in coomologia, cioè:

$$H^\bullet(M) \cong \bigoplus_\alpha H^\bullet(M_\alpha). \quad \square$$

2.3 Successione di Mayer-Vietoris

In questo paragrafo ci occupiamo di uno degli strumenti più efficaci nel calcolo della coomologia di una data varietà: la successione di Mayer-Vietoris.

Definizione 2.3.1 *Sia M una varietà e siano U, V due aperti tali che $M = U \cup V$. Definiamo le applicazioni:*

$$i : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$$

come

$$\omega \mapsto (\omega |_U, \omega |_V)$$

e

$$k : \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \rightarrow \Omega^\bullet(U \cap V)$$

come

$$(\omega, \phi) \mapsto \omega |_{U \cap V} - \phi |_{U \cap V} .$$

Proposizione 2.3.1 *La successione*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{i} \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{k} \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0$$

è esatta. Tale successione prende il nome di successione di Mayer-Vietoris.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare l'esattezza in tre punti:

1. Data $\omega \in \ker i$ si ha che $\omega|_U = 0$ e $\omega|_V = 0$ che implica, essendo $M = U \cup V$, che $\omega = 0$ e quindi che i è iniettiva.
2. Chiaramente si ha che $ki = 0$ e quindi che $\text{im } i \subset \ker k$. Del resto, sia $(\omega, \phi) \in \ker k$ allora si ha $\omega|_{U \cup V} = \phi|_{U \cup V}$, quindi ha senso definire:

$$\theta(x) = \begin{cases} \omega(x) & \text{se } x \in U \\ \phi(x) & \text{se } x \in V. \end{cases}$$

Evidentemente si ha $i(\theta) = (\omega, \phi)$ e quindi ne segue $\ker k \subset \text{im } i$.

3. Infine sia $\omega \in \Omega^r(U \cap V)$ e sia $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partizione dell'unità associata a $\{U, V\}$ (per l'esistenza di una partizione dell'unità subordinata ad un dato ricoprimento aperto vedi [Rh], pag.3). Si ha che $\omega = \rho_U \omega + \rho_V \omega$, (poiché $\rho_U + \rho_V = 1$). Osserviamo che vale:

$$V = (U \cap V) \cup (V \setminus \text{supp } \rho_U)$$

perché $(\text{supp}(\rho_U) \cap V) \subset U \cap V$. Definiamo $\overline{\rho_U \omega} \in \Omega^r(V)$ nel modo seguente:

$$\overline{\rho_U \omega}(x) = \begin{cases} \rho_U \omega & \text{se } x \in U \cap V \\ 0 & \text{se } x \in V \setminus \text{supp } \rho_U \end{cases}$$

La definizione è ben posta in quanto $\rho_U \omega|_{(V \setminus \text{supp } \rho_U) \cap (U \cap V)} = 0$. Inoltre $\overline{\rho_U \omega}|_{U \cap V} = \rho_U \omega$. Analogamente definiamo $\overline{\rho_V \omega} \in \Omega^r(U)$ in modo che $\overline{\rho_V \omega}|_{U \cap V} = \rho_V \omega$. Allora si ha che:

$$\omega = \rho_V \omega + \rho_U \omega = \overline{\rho_V \omega}|_{U \cap V} + \overline{\rho_U \omega}|_{U \cap V} = k(\overline{\rho_V \omega}, -\overline{\rho_U \omega}),$$

quindi k è suriettiva. \square

Quindi per il teorema 2.1.1 si ha che la successione esatta corta di Mayer-Vietoris induce la successione esatta lunga, detta anch'essa di Mayer-Vietoris:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{r-1}} H^r(M) \xrightarrow{H^r i} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{H^r k} H^r(U \cap V) \xrightarrow{\delta_r} H^{r+1}(M) \xrightarrow{H^{r+1} i} \dots$$

Vediamo in questo caso specifico come è definita δ . Sia $[\omega] \in H^r(U \cap V)$, allora per la dimostrazione del teorema precedente ponendo $\eta = (\overline{\rho_V \omega}, -\overline{\rho_U \omega})$ si ha $k(\eta) = \omega$. Allora, seguendo la dimostrazione del teorema 2.1.1, si ha che $\delta[\omega] = [i^{-1}(d\eta)]$ cioè:

$$\delta[\omega] = \begin{cases} [d(\overline{\rho_V \omega})] & \text{su } U \\ [-d(\overline{\rho_U \omega})] & \text{su } V \end{cases}$$

Vediamo subito un esempio in cui si utilizza la successione di Mayer-Vietoris per calcolare la coomologia.

Esempio 2.3.1 Sia $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria. Consideriamo gli aperti $U = S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ e $V = S^1 \setminus \{(0, -1)\}$. Si ha $S^1 = U \cup V$. Inoltre U e V sono diffeomorfi a \mathbb{R} quindi per la proposizione 2.2.5, si ha:

$$H^k(U) = H^k(\mathbb{R}) = H^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'intersezione, $U \cap V = S^1 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$ è diffeomorfo all'unione disgiunta di due copie di \mathbb{R} , quindi per la proposizione 2.2.6 si ha

$$H^k(U \cap V) = H^k(\mathbb{R}) \oplus H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha che $H^0(S^1) = \mathbb{R}$ perché S^1 è connesso e $H^k(S^1) = 0$ per $k > 1$ (poiché S^1 ha dimensione 1). Rimane da determinare $H^1(S^1)$, per farlo usiamo la successione di Mayer-Vietoris:

$$\dots \xrightarrow{H^0 i} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{H^0 k} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^1) \xrightarrow{H^1 i} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{H^1 k} \dots$$

Poiché $H^1(U) \oplus H^1(V) = 0$, per l'esattezza della successione si ha che δ_0 è suriettiva. Ora, sfruttando la relazione per cui, data un'applicazione lineare, la dimensione del dominio è uguale alla dimensione dell'immagine più la dimensione del nucleo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dim H^1(S^1) &= \dim \text{im } \delta_0 \\ &= \dim H^0(U \cap V) - \dim \ker \delta_0 \\ &= 2 - \dim \text{im } H^0 k \\ &= 2 - [\dim(H^0(U) \oplus H^0(V)) - \dim \ker H^0 k] \\ &= \dim \ker H^0 k. \end{aligned}$$

Dal seguente tratto della successione di Mayer-Vietoris,

$$\dots 0 \longrightarrow H^0 S^1 \xrightarrow{H^0 i} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{H^0 k} H^0(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

si ha che

$$\dim \ker H^0 k = \dim \text{im } H^0 i = \dim H^0(S^1) = 1$$

quindi $\dim H^1(S^1) = 1$ e $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Richiamiamo il seguente teorema.

Teorema 2.3.1 (Teorema di Stokes) *Sia M una varietà C^∞ , orientata, di dimensione n . Sia $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, tale che $\text{supp}(\omega)$ è compatto. Si ha:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

dove ∂M ha l'orientazione indotta da M .

Una dimostrazione per questo teorema si può trovare in [B-T], pag.31, teorema 3.5. Un immediato corollario del teorema di Stokes è il seguente risultato.

Corollario 2.3.1 *Se M è una varietà C^∞ , compatta, orientata e di dimensione n e ω è una n -forma esatta su M , allora*

$$\int_M \omega = 0$$

Dimostrazione. Sia ω una n -forma esatta su M allora, per definizione, esiste una $(n-1)$ -forma η tale che $\omega = d\eta$, quindi per il teorema di Stokes,

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0. \quad \square$$

Corollario 2.3.2 *Sia M una varietà compatta orientata di dimensione n , allora l'applicazione lineare*

$$\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega,$$

è suriettiva. In particolare $H^n(M) \neq 0$.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che per il corollario precedente \int_M è ben definita. Fissiamo una metrica arbitraria su M , allora esiste un'unica forma volume $\Delta \in \Omega^n(M)$ e vale

$$\int_M \Delta > 0,$$

quindi \int_M è diversa dall'applicazione nulla perciò, è suriettiva. \square

Osservazione 2.3.1 Riprendendo l'esempio della coomologia di S^1 , si ha che, per il corollario precedente, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ è generato dalla classe di coomologia della forma volume associata ad una fissata metrica su S^1 . Ad esempio se come metrica su S^1 prendiamo la restrizione ad S^1 della metrica euclidea su \mathbb{R}^2 , si ha che $H^1(S^1) = \langle [\frac{1}{2\pi}d\theta] \rangle$, dove θ è la coordinata angolare su S^1 (il motivo della presenza del fattore $\frac{1}{2\pi}$ è che $\int_{S^1} d\theta = 2\pi$).

Teorema 2.3.2 *Sia M una varietà C^∞ . La proiezione $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ induce un'isomorfismo in coomologia*

$$H\pi^* : H^\bullet(M) \rightarrow H^\bullet(M \times \mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Sia

$$s : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

la sezione nulla del fibrato vettoriale banale $M \times \mathbb{R}$. Allora π e s inducono applicazioni:

$$\Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \begin{array}{c} \xrightarrow{s^*} \\ \xleftarrow{\pi^*} \end{array} \Omega^\bullet(M).$$

Vogliamo dimostrare che queste due applicazioni inducono isomorfismi inversi in coomologia e quindi $H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \cong H^\bullet(M)$.

Dal fatto che $\pi s = id_M$, si ha banalmente che $s^* \pi^* = id_{\Omega^\bullet(M)}$. Tuttavia $s\pi \neq id_{M \times \mathbb{R}}$ e corrispondentemente $\pi^* s^* \neq id_{\Omega^\bullet(M \times \mathbb{R})}$. Per esempio, $\pi^* s^*$ fa corrispondere alla funzione $f(x, t)$, la funzione $f(x, 0)$ che è costante su ogni fibra. Per far vedere che $\pi^* s^*$ induce l'identità in coomologia, basta trovare una omotopia di catene K tra $\pi^* s^*$ e l'identità su $\Omega^\bullet(M \times \mathbb{R})$, vedi definizione 2.1.4 e osservazione 2.1.4:

$$K : \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}).$$

Siano (x_1, \dots, x_n) coordinate locali su M e sia t la coordinata globale su \mathbb{R} , allora (x_1, \dots, x_n, t) sono coordinate locali su $M \times \mathbb{R}$. Poiché, per la struttura di varietà prodotto, la coordinata globale t è indipendente dalle coordinate locali (x_1, \dots, x_n) , il fatto che in una r -forma differenziale su $M \times \mathbb{R}$ appaia o meno dt è indipendente dal sistema di coordinate locali di questo tipo in cui la si scrive. Perciò ogni $(r+1)$ -forma ω su $M \times \mathbb{R}$ si scrive in modo unico come

$$\omega = \alpha + \beta \wedge dt,$$

dove α e β sono forme che, scritte in coordinate locali, non contengono dt (è chiaro che sia α che β potrebbero essere forme nulle). Quindi β in coordinate locali, si scriverà come

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \beta_{i_1 \dots i_r}(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Definiamo

$$\int_0^t \beta(x, t) dt$$

in coordinate locali come

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(\int_0^t \beta_{i_1 \dots i_r}(x, s) ds \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Si ha che la definizione è ben posta perché, passando ad un altro sistema di coordinate (y_1, \dots, y_n, t) , si ha che

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \beta_{i_1 \dots i_r}(y, t) A_{i_1 \dots i_r}(y) dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}$$

dove $A_{i_1 \dots i_r}(y)$ è una funzione lineare in y che non coinvolge t , perciò la definizione di $\int_0^t \beta(x, t) dt$ rimane inalterata per cambiamenti di coordinate. Ora definiamo $K : \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^\bullet(M \times \mathbb{R})$ come la funzione lineare che soddisfa:

$$(I) \quad \alpha \mapsto 0$$

$$(II) \quad \beta \wedge dt \mapsto \int_0^t \beta dt.$$

Osserviamo che una forma ω su $M \times \mathbb{R}$ in cui non appaia dt , si può scrivere in coordinate locali come somma di forme del tipo

$$f(x, t)(\pi^* \phi)$$

quindi in coordinate locali K è definita da

$$(I) \quad f(x, t)(\pi^* \phi) \mapsto 0,$$

$$(II) \quad f(x, t)(\pi^* \phi) \wedge dt \mapsto \left(\int_0^t f(x, s) ds \right) (\pi^* \phi).$$

Dimostriamo che l'applicazione K così definita è in effetti un omotopia di catene. Per brevità indichiamo $id_{\Omega^\bullet(M \times \mathbb{R})}$ con id . Possiamo dimostrare l'uguaglianza localmente su un sistema di aperti coordinati per M , su cui (x_1, \dots, x_n) sono coordinate locali. Per semplicità indichiamo $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ semplicemente con $\frac{\partial f}{\partial x} dx$. Sulle forme di tipo (I) si ha:

$$\omega = f(x, t)(\pi^* \phi) \quad \deg(\omega) = q$$

$$\begin{aligned} (id - \pi^* s^*)\omega &= f(x, t)(\pi^* \phi) - f(x, 0)(\pi^* \phi), \\ (dK - Kd)\omega &= -Kd\omega \\ &= -K[f(x, t)(d\pi^* \omega) + (\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt) \wedge \pi^* \phi] \\ &= (-1)^{q-1} (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial s} ds) \pi^* \phi \\ &= (f(x, t) - f(x, 0)) \pi^* \phi, \end{aligned}$$

quindi

$$(id - \pi^* s^*)\omega = (-1)^{q-1} (dK - Kd)\omega.$$

Sulle forme di tipo (II), si ha:

$$\begin{aligned} \omega &= f(\pi^* \phi) \wedge dt \quad \deg(\omega) = q \\ d\omega &= f(\pi^* d\phi) \wedge dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge \pi^* \phi \wedge dt. \end{aligned}$$

Poiché vale $s^*(dt) = d(s^*t) = d(0) = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} (id - \pi^* s^*)\omega &= \omega \\ Kd\omega &= (\int_0^t f(x, s) ds) \pi^* d\phi + (\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) ds) dx \wedge \pi^* \phi, \\ dK\omega &= (\int_0^t f(x, s) ds) \pi^* d\phi + [(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) ds) dx + f(x, t) dt] \wedge \pi^* \phi. \end{aligned}$$

Quindi

$$(dK - Kd)\omega = (-1)^{q-1} \omega,$$

da cui, anche per le forme di tipo (II), si ha

$$(id - \pi^* s^*)\omega = (-1)^{q-1} (dK - Kd)\omega.$$

In definitiva si ha:

$$id - \pi^* s^* = (-1)^{q-1} (dK - Kd) \quad \text{su } \Omega^q(M \times \mathbb{R}).$$

Questo prova che le applicazioni

$$H^k(M \times \mathbb{R}) \begin{array}{c} \xrightarrow{H^k s^*} \\ \xleftarrow{H^k \pi^*} \end{array} H^k(M)$$

sono isomorfismi per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e quindi che $H^\bullet(M) \cong H^\bullet(M \times \mathbb{R})$. \square

Da questo teorema, ponendo $M = \mathbb{R}^n$, per induzione si ottiene il Lemma di Poincaré.

Corollario 2.3.3 (Lemma di Poincaré) *La coomologia di \mathbb{R}^n è la seguente:*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 2.3.2 *Due applicazioni omotope inducono la stessa applicazione in coomologia.*

Dimostrazione. Siano f e g due applicazioni omotope tra le varietà \mathcal{C}^∞ M e N allora, per definizione (vedi 1.4.6), esiste un'applicazione \mathcal{C}^∞

$$F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$$

tale che

$$\begin{cases} F(x, t) = f(x) & \text{se } t \leq 0 \\ F(x, 1) = g(x) & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

Equivalentemente, se $s_0, s_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ sono, rispettivamente, la sezione zero e la sezione uno, (dove per sezione uno si intende l'applicazione definita da $s_1(x) = (x, 1)$), allora

$$f = F s_0,$$

$$g = F s_1.$$

Quindi

$$f^* = (F s_0)^* = s_0^* F^*,$$

$$g^* = (F s_1)^* = s_1^* F^*.$$

Poiché sia s_0^* che s_1^* invertono $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, proiezione sul primo fattore, esse sono uguali. Quindi

$$f^* = g^*,$$

da cui

$$H^k f^* = H^k g^*$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. \square

Corollario 2.3.4 (Assioma di omotopia) *Due varietà con lo stesso tipo di omotopia (vedi definizione 1.4.7) hanno la stessa coomologia di De Rham.*

Corollario 2.3.5 *Se A è un retratto per deformazione di M (vedi definizione 1.4.8) allora A e M hanno la stessa coomologia di De Rham.*

Concludiamo il capitolo con il calcolo della coomologia di alcuni spazi.

Esempio 2.3.2 Calcoliamo la coomologia di $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dimostriamo per induzione su n che vale

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, n \\ 0 & \text{se } k \neq 0, n. \end{cases}$$

Per $n = 1$ è vero (vedi esempio 2.3.1). Ora supponiamo che sia vero per S^{n-1} e dimostriamo che allora vale anche per S^n . Analogamente a quanto fatto nel caso di S^1 , consideriamo i due aperti $U = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ e $V = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$. Chiaramente si ha $M = U \cup V$. Si ha

$$U \cong \mathbb{R}^n \cong V,$$

ad esempio tramite le proiezioni stereografiche. Inoltre per quanto riguarda $U \cap V = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, -1)\}$, si ha che

$$U \cap V \cong S^{n-1} \times]-1, 1[\cong S^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Per vederlo basta considerare l'applicazione che associa ad ogni punto P di $U \cap V$, il punto d'intersezione della retta passante per P e parallela all'iperpiano coordinato $x_{n+1} = 0$, con $S^{n-1} \times]-1, 1[$; si vede con facilità che questa applicazione è un diffeomorfismo. Quindi abbiamo

$$H^k(U) = H^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

e per l'ipotesi induttiva

$$H^k(U \cap V) = H^k(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \cong H^k(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, n-1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0, n-1. \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} H^0(S^n) &= \mathbb{R} && \text{perché } S^n \text{ è connesso,} \\ H^k(S^n) &= 0 && \text{se } k > n = \dim S^n. \end{aligned}$$

Per calcolare gli altri gruppi di coomologia usiamo la successione di Mayer-Vietoris. Consideriamo prima il caso in cui $k = 1$:

$$H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{H^0k} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^n) \xrightarrow{H^1i} H^1(U) \oplus H^1(V).$$

Consideriamo $H^0k : H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$, questa è in effetti un'applicazione

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$(a, b) \mapsto (a - b).$$

Quindi il nucleo di H^0k è $\{(a, a) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \text{ tali che } a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$. Perciò $\dim \text{im } H^0k = 1$ e quindi H^0k è suriettiva e δ_0 è l'applicazione nulla. Per cui c'è una successione esatta del tipo:

$$0 \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^n) \xrightarrow{H^1i} 0,$$

da cui $H^1(S^n) = 0$.

Sia ora $1 < k < n + 1$. Si ha

$$H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \xrightarrow{H^{k-1}k} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^k(S^n) \xrightarrow{H^ki} H^k(U) \oplus H^k(V),$$

che, essendo $H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V)$ e $H^k(U) \oplus H^k(V)$ entrambi nulli (perché $k-1, k > 0$), dà:

$$0 \xrightarrow{H^{k-1}k} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^k(S^n) \xrightarrow{H^ki} 0,$$

che implica, per l'esattezza, che δ_{k-1} è un isomorfismo e quindi che

$$H^k(S^n) = H^{k-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, la struttura di $H^\bullet(S^n)$ come algebra è molto semplice, se t è un generatore di $H^n(S^n)$ allora

$$H^\bullet(S^n)_{DR} = \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2)},$$

dove $\mathbb{R}[t]$ sono i polinomi in una variabile a coefficienti in \mathbb{R} .

Esempio 2.3.3 Calcoliamo la coomologia di De Rham del toro $T = S^1 \times S^1$. Come al solito, dalla connessione di T , segue che $H^0(T) = \mathbb{R}$ e dal fatto che $\dim T = 2$, segue che $H^k(T) = 0$ se $k > 2$. Siano (θ_1, θ_2) coordinate sul toro, con θ_i coordinata angolare su S^1 . Consideriamo i sottoinsiemi chiusi del toro $A = S^1 \times \{0\}$ e $B = S^1 \times \{\pi\}$. Definiamo $U = T \setminus A$ e $V = T \setminus B$; chiaramente $T = U \cup V$. Poiché, dato $P \in S^1$, vale $S^1 \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}$, si ha $U \cong S^1 \times \mathbb{R} \cong V$, quindi

$$H^k(U) = H^k(V) = H^k(S^1 \times \mathbb{R}) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0, 1. \end{cases}$$

Inoltre $U \cap V$ ha due componenti connesse, ognuna delle quali è diffeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}$, cioè $U \cap V$ è diffeomorfo all'unione disgiunta di due copie di $S^1 \times \mathbb{R}$ e quindi

$$H^k(U \cap V) = H^k(S^1 \times \mathbb{R}) \oplus H^k(S^1 \times \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0, 1. \end{cases}$$

Consideriamo la successione di Mayer-Vietoris per T . Dall'esattezza di

$$0 \longrightarrow H^0(T) \xrightarrow{H^0 i} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{H^0 k} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1(T),$$

si ha che

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} \delta_0 &= \dim H^0(U \cap V) - \dim \operatorname{im} H^0 k \\ &= 2 - [\dim(H^0(U) \oplus H^0(V)) - \dim \operatorname{im} H^0 i] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vogliamo analizzare $H^1 k : H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V)$. Per farlo vediamo come si comporta sui generatori. Si ha che i generatori di $H^1(U)$ e $H^1(V)$ sono (vedi osservazione 2.3.1)

$$H^1(U) = \left\langle \left[\frac{1}{2\pi} d\theta_1 \right] \right\rangle \quad \text{e} \quad H^1(V) = \left\langle \left[\frac{1}{2\pi} d\theta_1 \right] \right\rangle,$$

quindi

$$H^1(U) \oplus H^1(V) = \langle ([\frac{1}{2\pi}d\theta_1], 0), (0, [\frac{1}{2\pi}d\theta_1]) \rangle .$$

Ora, in generale, $H^1k(\mu, \eta) = \mu|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V}$, quindi in particolare si ha:

$$\begin{aligned} H^1k([\frac{1}{2\pi}d\theta_1], 0) &= ([\frac{1}{2\pi}d\theta_1], [\frac{1}{2\pi}d\theta_1]) \\ H^1k(0, [\frac{1}{2\pi}d\theta_1]) &= (-[\frac{1}{2\pi}d\theta_1], -[\frac{1}{2\pi}d\theta_1]) \\ &= -H^1k([\frac{1}{2\pi}d\theta_1], 0), \end{aligned}$$

quindi $\dim \operatorname{im} H^1k = 1$. Ora da quanto appena osservato e dall'esattezza di

$$\xrightarrow{\delta_0} H^1(T) \xrightarrow{H^1i} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{H^1k} H^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta_1} H^2(T) \longrightarrow 0,$$

si ha che

$$\begin{aligned} \dim H^2(T) &= \dim H^1(U \cap V) - \dim \operatorname{im} H^1k = 1 \\ \dim H^1(T) &= \dim \operatorname{im} \delta_0 + \dim \operatorname{im} H^1i \\ &= 1 + [\dim(H^1(U) \oplus H^1(V)) - \dim \operatorname{im} H^1k] \\ &= 2. \end{aligned}$$

In conclusione si ha:

$$H^k(T) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 2 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 2.3.4 Calcoliamo la coomologia di \mathbb{RP}^2 . Innanzitutto, \mathbb{RP}^2 è connesso (può essere visto come quoziente di S^2 che è connesso), e quindi $H^0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{R}$. Sappiamo anche che, essendo 2 la dimensione di \mathbb{RP}^2 , vale $H^k(\mathbb{RP}^2) = 0$ se $k > 2$. Sia

$$U_i = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{RP}^2 \text{ tali che } x_i \neq 0\}, \quad \text{con } i = 0, 1, 2.$$

Per il calcolo degli altri gruppi di coomologia vogliamo usare la successione di Mayer-Vietoris associata agli aperti $V = U_2$ e $U = U_0 \cup U_1$, quindi dobbiamo prima calcolare la coomologia di U . Per farlo usiamo ancora una volta la

successione di Mayer-Vietoris associata agli aperti U_0 e U_1 . Chiaramente, essendo gli U_i aperti coordinati per $\mathbb{R}P^2$, essi sono diffeomorfi ad \mathbb{R}^2 e quindi

$$H^k(U_i) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'intersezione, leggendola in coordinate locali in U_0 , è

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x \neq 0\},$$

che è diffeomorfo a due copie di \mathbb{R}^2 , quindi

$$H^k(U_0 \cap U_1) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Scriviamo la successione di Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H^0(U_0 \cup U_1) \xrightarrow{H^0 i} H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \xrightarrow{H^0 k} H^0(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{\delta_0} H^1(U_0 \cup U_1) \longrightarrow 0,$$

si ha

$$\begin{aligned} \dim H^1(U_0 \cup U_1) &= \dim \text{im } \delta_0 \\ &= \dim H^0(U_0 \cap U_1) - \dim \text{im } H^0 k \\ &= 2 - [\dim(H^0(U_0) \oplus H^0(U_1)) - \dim \text{im } H^0 i] \\ &= \dim H^0(U_0 \cup U_1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Quindi $H^1(U_0 \cup U_1) = \mathbb{R}$. Sia $n \geq 2$, si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^n(U_0 \cap U_1) \longrightarrow 0,$$

quindi $H^k(U_0 \cap U_1) = 0$ se $k \geq 2$. Ricapitolando

$$H^k(U_0 \cup U_1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0, 1. \end{cases}$$

Passiamo ora al calcolo della coomologia di $\mathbb{R}P^2$. Abbiamo calcolato la coomologia di U e quella di V . Consideriamo ora $U \cap V$, leggendolo in coordinate locali ad esempio su U_2 , si può vedere come $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Poiché

S^1 è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (una retrazione è data dall'applicazione che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'elemento $(x/\|x\|) \in S^1$) si ha

$$H^k(U \cap V) = H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0, 1. \end{cases}$$

Consideriamo la successione di Mayer-Vietoris e consideriamo in particolare la seguente applicazione

$$H^1k : H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V),$$

in realtà essendo $H^1(V) = 0$, l'applicazione diventa,

$$H^1k : H^1(U) \rightarrow H^1(U \cap V).$$

Vogliamo dimostrare che H^1k è un isomorfismo, per farlo, essendo H^1k un'applicazione da \mathbb{R} a \mathbb{R} , basta far vedere che esiste un elemento $\omega \in H^1(U)$ la cui immagine attraverso H^1k è diversa da zero. Si ha

$$H^1(U \cap V) = \langle [d\theta] \rangle$$

dove θ è la coordinata angolare su $U \cap V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vogliamo far vedere che è possibile estendere $d\theta$ a tutto U in modo che la sua restrizione attraverso H^1k sia $d\theta$.

Su $U \cap V$ ho coordinate $(x = \frac{x_0}{x_2}, y = \frac{x_1}{x_2})$,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \omega|_{U \setminus \{(0,0)\}}. \end{aligned}$$

Vediamo che ω si estende in modo C^∞ anche su U_0 e U_1 . Su U_0 ho coordinate $(x' = \frac{x_1}{x_0}, y' = \frac{x_2}{x_0})$ quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y'} \\ y = \frac{x'}{y'} \end{cases} \implies \begin{cases} dx = -\frac{1}{y'^2} dy' \\ dy = \frac{1}{y'} dx' - \frac{x'}{y'^2} dy'. \end{cases}$$

Perciò

$$\omega|_{U_0} = \frac{dx'}{1+x'^2}$$

che è C^∞ e chiusa su tutto U_0 . Analogamente si vede che si può estendere ω in modo C^∞ anche su U_1 . Quindi $[\omega] \in H^1(U)$ e si ha $H^1k([\omega]) = [d\theta]$. Perciò H^1k è un isomorfismo. Ora scrivendo la successione di Mayer-Vietoris si ha subito

$$H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{H^1k} H^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta_1} H^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) = 0$$

quindi si ha

$$\dim H^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \dim \text{im } \delta_1 = \dim H^1(U \cap V) - \dim \text{im } H^1k = 0,$$

da cui $H^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = 0$. Analizzando, invece, il seguente tratto della successione di Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \xrightarrow{H^0i} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{H^0k} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \xrightarrow{H^1i}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} \dim H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) &= \dim \text{im } H^1i + \dim \text{im } \delta_0 \\ &= \dim \ker H^1k + [\dim H^0(U \cap V) - \dim \text{im } H^0k] \\ &= 0 + 1 - [\dim(H^0(U) \oplus H^0(V)) - \dim \text{im } H^0i] \\ &= -1 + \dim H^0(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = 0$. Ricapitolando si ha

$$H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 2.3.5 Un esempio molto interessante per vedere la struttura di algebra della coomologia di De Rham di una varietà, è $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Iniziamo con il calcolo di $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$. Poiché $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ è diffeomorfo ad S^2 , si ha

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Supponiamo ora $n > 1$ e calcoliamo la coomologia di De Rham di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Fissiamo $P_0 = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e consideriamo gli aperti

$$\begin{aligned} U &= U_0 = \{[x_0, \dots, x_n] \text{ tali che } x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \\ V &= \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \{P_0\}. \end{aligned}$$

Si ha che $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = U \cup V$ e $U \cap V \cong \mathbb{C}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, ma quest'ultimo, come osservato nell'esempio precedente, è omotopo a S^{2n-1} , quindi

$$H^q(U \cap V) = H^q(S^{2n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e

$$H^q(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Perciò per usare la successione di Mayer-Vietoris associata agli aperti U e V , dobbiamo calcolare la coomologia di V . Per farlo, consideriamo l'applicazione

$$\pi : V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$$

definita da

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto [x_1, \dots, x_n].$$

La definizione è ben posta perché P_0 non appartiene a V , quindi si ha che $\pi([P]) \neq (0, \dots, 0)$ per ogni $P \in V$. Consideriamo poi

$$j : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow V$$

definita da

$$[x_1, \dots, x_n] \mapsto [0, x_1, \dots, x_n],$$

si ha che $\pi j = id_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}}$. Mentre $j\pi$ è omotopo all'identità. Infatti, consideriamo

$$F : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$$

$$F([x_0, \dots, x_n], t) = [tx_0, x_1, \dots, x_n],$$

si ha che

$$\begin{aligned} F([x_0, \dots, x_n], 0) &= [0, x_1, \dots, x_n] = j\pi[x_0, \dots, x_n] \\ F([x_0, \dots, x_n], 1) &= [x_0, x_1, \dots, x_n] = id_V[x_0, \dots, x_n], \end{aligned}$$

inoltre F è \mathcal{C}^∞ , quindi è un'omotopia. Perciò si ha che V e $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ hanno lo stesso tipo di omotopia, quindi, per l'assioma di omotopia della coomologia di De Rham (corollario 2.3.4),

$$H^\bullet(V) = H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}).$$

Proviamo per induzione su n che

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q \text{ è pari e } 0 \leq q \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $n = 1$, è verificato (vedi sopra). Ora supponiamo che valga per $n - 1$ e dimostriamolo per n . Scriviamo la successione di Mayer-Vietoris relativa al ricoprimento $\{U, V\}$ di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$:

$$\dots \longrightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{q-1}} H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{H^q_i} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{H^q_k} H^q(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

e consideriamo il caso in cui $2 \leq q \leq 2n - 2$, allora

$$H^{q-1}(U \cap V) = 0 = H^q(U \cap V) = H^q(U),$$

perciò si ha che H^q_i è un isomorfismo quindi

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong H^q(V) \cong H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q \text{ è pari e } 2 \leq q \leq 2n - 2 \\ 0 & \text{se } q \text{ è dispari e } 2 \leq q \leq 2n - 2. \end{cases}$$

Supponiamo $q = 2n - 1$, allora

$$H^{q-1}(S^{2n-1}) = 0 = H^q(V) = H^q(U)$$

quindi anche $H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$. Sia ora $q = 2n$, analizzando il seguente tratto della successione di Mayer-Vietoris

$$0 = H^{2n-1}(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{H^{2n-1}_k} H^{2n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{2n-1}} H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ \xrightarrow{H^{2n}_i} H^{2n}(U) \oplus H^{2n}(V) = 0,$$

si ha che $H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = H^{2n-1}(U \cap V) = \mathbb{R}$. Rimangono da determinare i gruppi di coomologia di grado zero e uno di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Per quanto riguarda il grado zero si ha che $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}$, perché $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è connesso in quanto è un

quoziente di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ che è connesso. Determiniamo $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Si ha la successione esatta ($H^1(U) = H^1(V) = 0$):

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{H^0 i} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{H^0 k} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta_0} H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow 0.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \dim H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) &= \dim \operatorname{im} \delta_0 \\ &= \dim H^0(U \cap V) - \dim \operatorname{im} H^0 k \\ &= 1 - [\dim(H^0(U) \oplus H^0(V)) - \dim \operatorname{im} H^0 i] \\ &= -1 + \dim H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da cui $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$. Quindi, ricapitolando,

$$H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k \text{ è pari e } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dal calcolo della coomologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ si desume che $H^q i$ è un isomorfismo per $0 < q < 2n$. Se indichiamo con $\bar{j} = i_V j$, dove i_V è l'immersione di V in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, allora, essendo $H^q(U) = 0$ per ogni $q \neq 0$, si ha che \bar{j} induce un isomorfismo in coomologia

$$H^q \bar{j}^* : H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n),$$

per $0 < q < 2n$. Vogliamo dimostrare per induzione su n che, fissato un elemento $t \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \setminus \{0\}$, con $n > 0$ allora t^q genera $H^{2q}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, per $0 \leq q \leq 2n$ e quindi

$$H_{DR}^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^{n+1})},$$

dove $\mathbb{R}[t]$ è l'algebra dei polinomi in una variabile a coefficienti in \mathbb{R} . Visto come sono fatti i gruppi di coomologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ questo equivale a dimostrare che $t^q \neq 0$ per ogni $0 \leq q \leq 2n$. Per $n = 1$ è ovviamente verificato. Ora sia $n > 1$, allora, come osservato sopra si ha che $H \bar{j}^*$ è un'isomorfismo di algebre, quindi se $s \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \setminus \{0\}$ allora

$$t = H \bar{j}^* s \neq 0$$

e, essendo per l'ipotesi induttiva $s^q \neq 0$ per $0 \leq q \leq n - 1$, si ha

$$t^q = (H \bar{j}^* s)^q = H \bar{j}^* (s^q) \neq 0.$$

Quindi t^q genera $H^{2q}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ per $0 \leq q < n - 1$. Un metodo immediato per dimostrare che $t^n \neq 0$ è usare la dualità di Poincaré, teorema di cui daremo la dimostrazione in seguito (vedi teorema 3.2.1). Poiché $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è compatto (può essere visto come un quoziente di S^{2n-1} che è compatto) ed è orientabile, per la dualità di Poincaré si ha che l'applicazione bilineare

$$H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \times H^{2n-2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$(t, t^{n-1}) \mapsto \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} t^n$$

è non degenera. Quindi $\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} t^n \neq 0$, perciò $t^n \neq 0$ e t^n genera $H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, il che completa la dimostrazione.

Un altro modo di dimostrare, senza l'uso della dualità di Poincaré, che $t^n \neq 0$ è farlo tramite calcoli diretti trovando un generatore t di $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Calcoliamo, in particolare, un generatore per $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$. Per descrivere le forme su $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ è sufficiente, per densità, scriverle in coordinate su

$$U_0 = \{[1, u, v] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{C}^2,$$

controllando però che siano \mathcal{C}^∞ su tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Siano

$$\begin{aligned} u &= r e^{2\pi i \theta} \\ v &= s e^{2\pi i \phi} \end{aligned}$$

con $r, s \geq 0$ e $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$, coordinate su U_0 , cioè (r, θ) e (s, ϕ) sono coordinate polari su \mathbb{R}^2 . Si noti che r non è \mathcal{C}^∞ , mentre $r^2 = x^2 + y^2$ lo è e quindi essendo $2rdr = d(r^2)$, anche rdr è \mathcal{C}^∞ . Analogamente $2\pi\theta = \arctan(y/x)$ non è definita globalmente, ma $2\pi r^2 d\theta = xdy - ydx$ è una 1-forma \mathcal{C}^∞ e $2\pi r dr \wedge d\theta = dx \wedge dy$ è una 2-forma \mathcal{C}^∞ . Procederemo in questo modo: vogliamo scrivere una 2-forma chiusa ω su $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ che non sia esatta, ma la cui restrizione su U_0 sia esatta ($\omega = d\eta$ su $U_0 \cong \mathbb{R}^4$). Quindi inizieremo scrivendo la 1-forma η . Vogliamo dimostrare che

$$\eta = \frac{r^2 d\theta + s^2 d\phi}{1 + r^2 + s^2}$$

funziona. Definiamo

$$\begin{aligned} \omega &= d\eta \\ &= \frac{(1 + s^2)2rdr \wedge d\theta - 2sds \wedge r^2 d\theta - 2rdr \wedge s^2 d\phi + (1 + r^2)2sds \wedge d\phi}{(1 + r^2 + s^2)^2} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

dove la prima uguaglianza vale solo su U_0 . Dobbiamo dimostrare che ω definisce una forma su tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Per fare questo dobbiamo calcolare come si scrive ω tramite i cambi di variabili sulle carte U_1 e U_2 , ma per simmetria è sufficiente considerarne solo uno. È più facile fare un cambio di variabili su η , passare a $d\eta$ e analizzarla. Consideriamo il cambio di variabili da U_0 a U_1 si ha

$$\begin{aligned} [1, u, v] &= [1/u, 1, v/u] \\ &= [(1/r)e^{2\pi i(-\theta)}, 1, (s/r)e^{2\pi i(\phi-\theta)}] \\ &= [r_1 e^{2\pi i\theta_1}, 1, s_1 e^{2\pi i\phi_1}]. \end{aligned}$$

Quindi il cambio di coordinate è

$$\begin{cases} r = 1/r_1 \\ s = s_1/r_1 \\ \theta = -\theta_1 \\ \phi = \phi_1 - \theta_1, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} dr = (-1/r_1^2)dr_1 \\ ds = (1/r_1)ds_1 - (s_1/r_1^2)dr_1 \\ d\theta = -d\theta_1 \\ d\phi = d\phi_1 - d\theta_1. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(1/r_1^2)(-d\theta_1) + (s_1^2/r_1^2)(d\phi_1 - d\theta_1)}{1 + 1/r_1^2 + s_1^2/r_1^2} \\ &= \frac{-(1 + s_1^2)d\theta_1 + s_1^2 d\phi_1}{1 + r_1^2 + s_1^2}. \end{aligned}$$

Notiamo che la parte $s_1^2 d\phi_1$ è \mathcal{C}^∞ , mentre la parte che comprende $d\theta_1$ non è definita quando $r_1 = 0$, che è il motivo per cui η non è una forma globale su $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Quindi dobbiamo solo dimostrare che

$$d\left(\frac{(1 + s_1^2)d\theta_1}{1 + r_1^2 + s_1^2}\right)$$

è \mathcal{C}^∞ . Ma questa è

$$\frac{-(1 + s_1^2)2r_1 dr_1 \wedge d\theta_1 + [(1 + r_1^2 + s_1^2)2s_1 - (1 + s_1^2)2s_1] ds_1 \wedge d\theta_1}{(1 + r_1^2 + s_1^2)^2}.$$

Abbiamo notato sopra che il termine $r_1 dr_1 \wedge d\theta_1$ è C^∞ . L'espressione nelle parentesi quadre è $2s_1 r_1^2 ds_1 \wedge d\theta_1 = (2s_1 ds_1) \wedge (r_1^2 d\theta_1)$ e quindi è C^∞ . Quindi ω è una 2-forma su tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Poiché su U_0 si ha $d\omega = dd\eta = 0$, allora, per continuità, $d\omega = 0$ su tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, cioè ω è chiusa.

Vogliamo anche dimostrare che ω non è esatta, ma per farlo è sufficiente far vedere che $\omega \wedge \omega$ non è esatta (il prodotto esterno porta forme esatte in forme esatte). Calcoliamo $\omega \wedge \omega$ usando la formula (2.3.1)

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega &= \frac{2[4rs(1+s^2)(1+r^2) - 4r^3s^3]}{(1+r^2+s^2)^4} dr \wedge d\theta \wedge ds \wedge d\phi \\ &= \frac{8rs}{(1+r^2+s^2)^3} dr \wedge d\theta \wedge ds \wedge d\phi.\end{aligned}$$

Usando $dr \wedge d\theta \wedge ds \wedge d\phi$ per orientare $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \omega \wedge \omega &= \int_{U_0} \omega \wedge \omega \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^\infty \frac{8rs}{(1+r^2+s^2)^3} dr d\theta ds d\phi \\ &= 8 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{rs}{(1+r^2+s^2)^3} dr ds \\ &= 1,\end{aligned}$$

la prima uguaglianza è dovuta al fatto che $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus U_0$ letto attraverso le carte è un insieme di misura nulla in \mathbb{R}^4 . Quindi, per il teorema di Stokes, $\omega \wedge \omega$ non è esatta perciò $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ è generato da $[\omega]$. I calcoli che abbiamo fatto nel caso di $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ si possono facilmente generalizzare a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ per dimostrare che un generatore di $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ è ω_n che su $U_0 = \{[1, u_1, \dots, u_n]\}$ si scrive come

$$\omega = d\eta$$

con

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2 d\theta_i}{1 + \sum_{i=1}^n r_i^2},$$

dove

$$u_i = r_i e^{2\pi i \theta} \quad r_i \geq 0, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1$$

per $i = 1, \dots, n$. In modo analogo si vede che

$$\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n\text{-volte}} = 1,$$

quindi, se poniamo $t = [\omega]$, si ha che $t^n \neq 0$

Un immediato corollario che segue dal calcolo della coomologia è il seguente risultato.

Corollario 2.3.6 *Lo spazio proiettivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ non è omotopo a S^{2n} per $n > 1$.*

3 Coomologia a supporto compatto e dualità di Poincaré

3.1 Coomologia a supporto compatto

In questo paragrafo affrontiamo la costruzione di un altro invariante per diffeomorfismo delle varietà \mathcal{C}^∞ : la coomologia di De Rham a supporto compatto.

Definizione 3.1.1 *Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ . Il complesso di De Rham a supporto compatto relativo ad M , è il complesso $\Omega_c^\bullet(M) = (\oplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_c^k(M), d)$, dove $\Omega_c^k(M)$ è il sottospazio di $H^k(M)$ costituito dalle k -forme differenziali a supporto compatto (vedi definizione 1.3.1) e d è l'operatore differenziale (per convenzione, come nel caso del complesso di De Rham, si pone $H^k(M) = 0$, se $k < 0$). La coomologia associata a tale complesso è detta coomologia di De Rham a supporto compatto e viene indicata con $H_c^\bullet(M) = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} H_c^k(M)$.*

Osservazione 3.1.1 Chiaramente se M è una varietà \mathcal{C}^∞ compatta, si ha che $H^\bullet(M) = H_c^\bullet(M)$. Questo perché data una forma qualsiasi il suo supporto è un chiuso contenuto in un compatto, M stesso, e quindi è compatto.

Esempio 3.1.1 Calcoliamo la coomologia a supporto compatto di \mathbb{R} . Su \mathbb{R} le 0-forme chiuse sono le funzioni costanti. Poiché nessuna funzione costante su \mathbb{R} è a supporto compatto, si ha:

$$H_c^0(\mathbb{R}) = 0.$$

Per calcolare $H_c^1(\mathbb{R})$ consideriamo la seguente applicazione

$$\int_{\mathbb{R}} : \Omega_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Questa applicazione è chiaramente suriettiva e assume valore 0 sulle 1-forme esatte. Infatti sia df , con f a supporto compatto, una 1-forma esatta e sia $\text{supp } f \subset [a, b]$, vale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a) = 0.$$

Viceversa se $g(x) dx$ appartiene al nucleo di questa applicazione, allora la funzione

$$f(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$$

avrà supporto compatto e $df = g(x)dx$. Quindi il nucleo di $\int_{\mathbb{R}}$ è esattamente l'insieme delle 1-forme esatte a supporto compatto, perciò:

$$H_c^1(\mathbb{R}) = \frac{\Omega_c^1(\mathbb{R})}{\ker \int_{\mathbb{R}}} \cong \text{im} \int_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

Quindi ricapitolando si ha

$$H_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Osservazione 3.1.2 Da questo primo esempio si deduce che la coomologia a supporto compatto non è invariante per omotopia. Infatti, pur essendo \mathbb{R} contraibile, $H_c^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ mentre $H_c^1(\{P\}) = H^1(\{P\}) = 0$ (perché $\{P\}$ è compatto).

Analogamente a quanto fatto nel caso della coomologia di De Rham, prima di parlare della successione di Mayer-Vietoris, vorremmo discutere le proprietà functoriali di Ω_c . In generale però il pull-back tramite una applicazione \mathcal{C}^∞ , di una forma a supporto compatto, non è necessariamente a supporto compatto, come esempio basta considerare il pull-back di forme differenziali attraverso la proiezione $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Quindi Ω_c non è un funtore sulla categoria delle varietà e applicazioni \mathcal{C}^∞ . Tuttavia, se invece di considerare tutte le applicazioni \mathcal{C}^∞ , ne consideriamo un'appropriata sottoclasse, Ω_c diventa un funtore. Più precisamente:

1. Ω_c è un funtore controvariante sulla categoria delle varietà \mathcal{C}^∞ e delle funzioni proprie (ricordiamo che una funzione si dice propria se la controimmagine di ogni compatto è un insieme compatto).
2. Ω_c è un funtore covariante sulla categoria delle varietà \mathcal{C}^∞ e applicazioni di inclusione di sottoinsiemi aperti. Cioè se $j : U \rightarrow M$ è la mappa di inclusione, allora

$$j_* : \Omega_c^\bullet(U) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M)$$

è definita da

$$j_*\omega = \begin{cases} \omega & \text{su } U \\ 0 & \text{su } M \setminus U, \end{cases}$$

la definizione è ben posta perché, essendo ω a supporto compatto, ω è uguale a zero su $U \setminus \text{supp } \omega$ che è un'aperto contenuto in U , quindi l'estensione è \mathcal{C}^∞ .

Da ora in poi, con Ω_c intenderemo indicare il funtore covariante dalla categoria delle varietà \mathcal{C}^∞ e applicazioni di inclusione, alla categoria dei complessi e omomorfismi di catene. Ora definiamo la successione di Mayer-Vietoris per la coomologia a supporto compatto.

Definizione 3.1.2 *Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ e siano U e V due aperti tali che $M = U \cup V$. Date le inclusioni*

$$U \cap V \xrightarrow{k^U} U \xrightarrow{i^U} M$$

e

$$U \cap V \xrightarrow{k^V} V \xrightarrow{i^V} M,$$

definiamo le applicazioni:

$$k_c : \Omega_c^\bullet(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V)$$

definita da

$$\omega \mapsto (k_*^U \omega, -k_*^V \omega)$$

e

$$i_c : \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M)$$

definita da

$$(\omega, \phi) \mapsto i_*^U \omega + i_*^V \phi.$$

Proposizione 3.1.1 *La successione*

$$0 \longrightarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \xrightarrow{k_c} \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \xrightarrow{i_c} \Omega_c^\bullet(M) \longrightarrow 0$$

è esatta. Tale successione prende il nome di successione di Mayer-Vietoris delle forme differenziali a supporto compatto.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare l'esattezza in tre punti:

1. se una forma ω appartiene al nucleo di i_c , significa che la sua estensione a U e a V è la forma nulla e quindi, in particolare, è nulla su $U \cap V$, che dimostra che i_c è iniettiva.
2. Chiaramente si ha $i_c k_c$ è l'applicazione nulla e quindi $\text{im } k_c \subset \ker i_c$. Viceversa, sia $(\omega, \phi) \in \ker i_c$ allora si ha che $i_*^U \omega + i_*^V \phi = 0$, da cui

$$\omega|_{U \cap V} = -\phi|_{U \cap V}$$

e

$$\omega|_{U \setminus (U \cap V)} = 0 = \phi|_{V \setminus (U \cap V)},$$

quindi sia il supporto di ω che quello di ϕ sono in realtà contenuti in $U \cap V$ e si ha

$$(\omega, \phi) = k_c(\omega|_{U \cap V}).$$

Perciò $\ker i_c \subset \text{im } k_c$ e in conclusione $\ker i_c = \text{im } k_c$.

3. Sia $\omega \in \Omega_c^r(M)$. Allora, se $\{\rho_U, \rho_V\}$ è una partizione dell'unità subordinata a (U, V) , si ha che $\rho_U \omega$ e $\rho_V \omega$ sono forme a supporto compatto, rispettivamente, in U e V , infatti, prendiamo ad esempio $\rho_U \omega$, si ha

$$\text{supp } \rho_U \omega \subset \text{supp } \rho_U \cap \text{supp } \omega$$

e per un lemma di topologia generale, un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto è compatto. Inoltre

$$\omega = i_c(\rho_U \omega, \rho_V \omega),$$

che dimostra la suriettività di i_c . \square

Quindi per il teorema 2.1.1 si ha che la successione esatta corta di Mayer-Vietoris delle forme a supporto compatto, induce la successione esatta, detta successione di Mayer-Vietoris della coomologia a supporto compatto:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{r-1}^c} H_c^r(U \cap V) \xrightarrow{H^r k_c} H_c^r(U) \oplus H_c^r(V) \xrightarrow{H^r i_c} H_c^r(M) \xrightarrow{\delta_r^c} H_c^{r+1}(U \cap V) \xrightarrow{H^{r+1} k_c} \dots$$

Vediamo in questo caso come è fatto l'omomorfismo di connessione δ^c . Sia $[\omega] \in \Omega_c^r(M)$, allora vale

$$H^r i_c([\rho_U \omega], [\rho_V \omega]) = [\omega],$$

dove $\{\rho_U, \rho_V\}$ è una partizione dell'unità associata al ricoprimento $\{U, V\}$. Ora, se poniamo $([\rho_U\omega], [\rho_V\omega]) = [\phi]$, per come è costruito l'omomorfismo di connessione si ha che

$$\delta^c[\omega] = [k_c^{-1}(d\phi)],$$

cioè $\delta^c[\omega]$ è tale che:

- l'estensione tramite zero di $\delta^c[\omega]$ a U è uguale a $[d(\rho_U\omega)]$,
- l'estensione tramite zero di $\delta^c[\omega]$ a V è uguale a $-[d(\rho_V\omega)]$.

Teorema 3.1.1 *Sia M una varietà C^∞ . Si ha*

$$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \cong H_c^{\bullet-1}(M),$$

(cioè $H_c^k(M \times \mathbb{R}) \cong H_c^{k-1}(M)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$).

Dimostrazione. Se indichiamo con $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la proiezione sul primo fattore, le forme su $M \times \mathbb{R}$ si scrivono, in coordinate locali, come combinazione lineare di (vedi la dimostrazione del teorema 2.3.2):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & f(x, t)\pi^*\phi, \\ \text{(II)} \quad & f(x, t)\pi^*\phi \wedge dt, \end{aligned}$$

in particolare quindi, anche le forme a supporto compatto si potranno esprimere in quel modo. Definiamo un'applicazione

$$\pi_* : \Omega_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{\bullet-1}(M)$$

tramite

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & f(x, t)\pi^*\phi \mapsto 0, \\ \text{(II)} \quad & f(x, t)\pi^*\phi \wedge dt \mapsto \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt \right) \phi. \end{aligned}$$

Si osserva, analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema 2.3.2, che l'applicazione, pur essendo definita in coordinate locali, è ben definita. Inoltre, data $\omega \in \Omega_c^\bullet(M \times \mathbb{R})$, si ha $\text{supp } \omega \subset C \times [a, b]$, con C compatto in M , quindi, se $\omega = f(x, t)\pi^*\phi \wedge dt$, si avrà che $\text{supp } f \subset C \times [a, b]$, perché $\pi^*\phi$ non dipende da t . Quindi, in particolare, si avrà che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt = \int_a^b f(x, t) dt.$$

Inoltre, $\text{supp } \pi_*\omega \subset (\text{supp } \omega \cap M) \subset C$, quindi è compatto (è un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto in uno spazio di Hausdorff), perciò il codominio di π_* è in effetti $\Omega_c^\bullet(M)$.

Verifichiamo che π_* è un omomorfismo di catene. Possiamo farlo localmente su un sistema di aperti coordinati per M , su cui (x_1, \dots, x_n) sono coordinate locali. Per semplicità, indichiamo $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ semplicemente con $\frac{\partial f}{\partial x} dx$. Sulle forme di tipo (I) si ha:

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, t)(\pi^*\phi) & \deg(\omega) &= q \\ d\pi_* &= 0 \\ \pi_*d &= \pi_*[f(x, t)(d\pi^*\omega) + (\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt) \wedge \pi^*\phi] \\ &= (-1)^{q-1} (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dt) \phi \\ &= (-1)^{q-1} (f(x, \eta) - f(x, -\eta)) \phi \\ &= 0 \quad \text{con } \eta \gg 0. \end{aligned}$$

Sulle forme di tipo (II), si ha:

$$\begin{aligned} \omega &= f(\pi^*\phi) \wedge dt & \deg(\omega) &= q \\ d\omega &= f(\pi^*d\phi) \wedge dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge \pi^*\phi \wedge dt. \end{aligned}$$

Chiaramente se poniamo, con un leggero abuso di notazioni, $dx = \pi^*dx$, essendo π^* un omomorfismo di algebre, si ha $dx \wedge \pi^*\phi = \pi^*(dx \wedge \phi)$.

$$\begin{aligned} \pi_*d\omega &= (\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt) d\phi + (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt) dx \wedge \phi, \\ d\pi_*\omega &= (\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt) d\phi + [(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt) dx \wedge \phi]. \end{aligned}$$

Quindi π_* è un omomorfismo di catene, perciò induce un omomorfismo in coomologia

$$H\pi_* : H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{\bullet-1}(M).$$

Sia $e = e(t)dt$ una 1-forma a supporto compatto su \mathbb{R} e con integrale su \mathbb{R} uguale a uno, consideriamo l'applicazione

$$e_* : \Omega_c^\bullet(M) \rightarrow \Omega_c^{\bullet+1}(M \times \mathbb{R})$$

definita da:

$$\phi \mapsto (\pi^* \phi) \wedge e.$$

Chiaramente l'applicazione e_* commuta con d e quindi induce un omomorfismo in coomologia

$$He_* : H_c^\bullet(M) \rightarrow H_c^{\bullet+1}(M \times \mathbb{R}).$$

Segue direttamente dalla definizione che $\pi_* e_* = id$ su $\Omega_c^\bullet(M)$. Tuttavia $e_* \pi_* \neq id$, quindi quello faremo è dimostrare che questa composizione è omotopa all'identità. Come operatore di omotopia consideriamo:

$$K : \Omega_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{\bullet-1}(M \times \mathbb{R})$$

definito da

$$(I) \quad f(x, t) \pi^* \phi \mapsto 0,$$

$$(II) \quad f(x, t) \pi^* \phi \wedge dt \mapsto \left(\int_{-\infty}^t f(x, s) ds \right) \pi^* \phi - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^t e(s) ds \right) \pi^* \phi.$$

Con calcoli analoghi a quelli eseguiti nella dimostrazione del teorema 2.3.2, si vede che K è in effetti un'omotopia di catene tra $e_* \pi_*$ e l'identità. Quindi e_* e π_* inducono isomorfismi inversi in coomologia e quindi vale

$$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \cong H_c^{\bullet-1}(M). \quad \square$$

Come corollario di questo teorema si ha il lemma di Poincaré per la coomologia a supporto compatto.

Corollario 3.1.1 *La coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}^n è:*

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

Osservazione 3.1.3 Per determinare un generatore di $H_c^n(\mathbb{R}^n)$, partiamo dalla funzione costante uno su un punto e iteriamo con e_* . Questo procedimento dà

$$e(x_1) dx_1 \wedge e(x_2) dx_2 \wedge \cdots \wedge e(x_n) dx_n.$$

Quindi un generatore per $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ è una forma $\alpha(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, dove

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx_1 \cdots dx_n = 1.$$

Il supporto di α può essere reso piccolo a piacere.

3.2 Dualità di Poincaré

Definizione 3.2.1 *Sia M una varietà di dimensione n . Un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M è detto un buon ricoprimento se tutte le intersezioni finite e non vuote $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ sono diffeomorfe a \mathbb{R}^n . Una varietà che ha un buon ricoprimento finito è detta di tipo finito.*

Proposizione 3.2.1 *Ogni ricoprimento aperto di una fissata varietà ammette un raffinamento che è un buon ricoprimento. Se la varietà è compatta il buon ricoprimento può essere scelto finito.*

Per la dimostrazione di questa proposizioni si veda [B-T], pag.42-43.

Proposizione 3.2.2 *Sia M una varietà C^∞ . Se M è di tipo finito la sua coomologia e la sua coomologia a supporto compatto sono di dimensione finita.*

Dimostrazione. Sia $\{U, V\}$ un ricoprimento aperto di M . Dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\dots \longrightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{q-1}} H^q(U \cup V) \xrightarrow{H^q i} H^q(U) \oplus H^q(V) \longrightarrow \dots$$

si ha

$$H^q(U \cup V) \cong \text{im } \delta_{q-1} \oplus \text{im } H^q i.$$

Quindi se $H^q(U)$, $H^q(V)$ e $H^{q-1}(U \cap V)$ hanno dimensione finita anche $H^q(M)$ avrà dimensione finita.

Procediamo per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento di M . Per una varietà diffeomorfa a \mathbb{R}^n , la proposizione segue dal lemma di Poincaré (vedi corollario 2.3.3). Supponiamo ora che la proposizione valga per una varietà che possiede buon ricoprimento di cardinalità p e consideriamo una varietà che possiede un buon ricoprimento $\{U_0, \dots, U_p\}$ formato da $p + 1$ aperti. Ora $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ ha un buon ricoprimento di cardinalità p , quindi per ipotesi induttiva la coomologia di $U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}$, di U_p e di $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ hanno dimensione finita e quindi, per l'osservazione sopra, anche la coomologia di $U_0 \cup \dots \cup U_p$ ha dimensione finita. Questo completa l'induzione. In modo analogo, usando la successione di Mayer-Vietoris e il lemma di Poincaré relativi alla coomologia a supporto compatto, si dimostra la proposizione per la coomologia a supporto compatto. \square

Definizione 3.2.2 Sia M una varietà C^∞ di tipo finito. La caratteristica di Eulero di M è il numero naturale $\chi(M) \in \mathbb{N}$ definito da

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(M).$$

Osservazione 3.2.1 la definizione è ben posta perché, per la proposizione precedente, la dimensione di $H^q(M)$ è finita.

Definizione 3.2.3 Sia M una varietà C^∞ , orientata e di dimensione n . Definiamo l'applicazione bilineare

$$\int_M : H^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \otimes [\phi] \mapsto \int_M \omega \wedge \phi.$$

Ricordiamo che se $\langle, \rangle : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione bilineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita, allora \langle, \rangle è non degenera se e solo se l'applicazione che ad ogni $v \in V$ associa $\langle v, \rangle \in W^*$ definita da

$$\langle v, \rangle (w) = \langle v, w \rangle,$$

è un isomorfismo tra V e W^* .

Teorema 3.2.1 (Dualità di Poincaré) Sia M una varietà C^∞ , orientata e di tipo finito, allora l'applicazione bilineare definita sopra è non degenera. Equivalentemente, data una varietà C^∞ , orientata, di dimensione n e di tipo finito, vale

$$H^q(M) \cong (H_c^{n-q}(M))^*.$$

Dimostrazione. Le successioni di Mayer-Vietoris relative alla coomologia e alla coomologia a supporto compatto danno luogo al seguente diagramma commutativo a meno del segno:

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(U) \oplus H^q(V) & \xrightarrow{H^q k} & H^q(U \cap V) & \xrightarrow{\delta_q} & H^{q+1}(U \cup V) \\ \otimes & & \otimes & & \otimes \\ H_c^{n-q}(U) \oplus H_c^{n-q}(V) & \xleftarrow{H^{n-q} k_c} & H_c^{n-q}(U \cap V) & \xleftarrow{\delta_{n-q-1}^c} & H_c^{n-q-1}(U \cup V) \\ \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{U \cap V} & & \downarrow \int_{U \cup V} \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

dove per commutativo a meno del segno si intende che

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge \delta_{n-q-1}^c \tau = \pm \int_{U \cap V} (\delta_q \omega) \wedge \tau,$$

con $[\omega] \in H^q(U \cap V)$ e $[\tau] \in H_c^{n-q-1}(U \cup V)$. Dimostriamo la commutatività dell'ultimo quadrato. Indichiamo δ_k semplicemente con δ e δ_k^c con δ^c e, quando questo non crei confusione, indichiamo $[\omega]$ semplicemente con ω .

Ricordiamo che $\delta\omega$ è una forma in $H^{q+1}(U \cup V)$ tale che

$$\delta\omega|_{U=} = d(\rho_V \omega)$$

$$\delta\omega|_{V=} = -d(\rho_U \omega)$$

e $\delta^c \tau$ è una forma in $H_c^{n-q}(U \cap V)$ tale che

$$(k_*^U \delta^c \tau, -k_*^V \delta^c \tau) = (d(\rho_U \tau), d(\rho_V \tau)).$$

Si osservi che $d(\rho_U \tau) = d(\rho_U) \wedge \tau$ perché τ è una forma chiusa; analogamente $d(\rho_V \omega) = d(\rho_V) \wedge \omega$. Si ha:

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge \delta^c \tau = \int_{U \cap V} \omega \wedge (d\rho_U) \wedge \tau = (-1)^{\deg(\omega)} \int_{U \cap V} (d\rho_U) \wedge \omega \wedge \tau.$$

Poiché $\delta\omega$ ha supporto in $U \cap V$, vale

$$\int_{U \cup V} \delta\omega \wedge \tau = - \int_{U \cap V} (d\rho_U) \wedge \omega \wedge \tau.$$

Quindi

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge \delta^c \tau = (-1)^{\deg(\omega)+1} \int_{U \cap V} (\delta\omega) \wedge \tau.$$

In modo simile si dimostra la commutatività a meno del segno per gli altri quadrati.

Per il lemma dei cinque (vedi proposizione 2.1.1) se la dualità di Poincaré vale per U , V e $U \cap V$, allora vale per $U \cup V$. Procediamo per induzione sulla cardinalità del buon ricoprimento. Se M è diffeomorfo a \mathbb{R}^n , (cioè M ha un buon ricoprimento con cardinalità uno), la dualità di Poincaré segue dai due lemmi di Poincaré sulla coomologia e coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}^n .

Supponiamo che la dualità di Poincaré valga per le varietà con un buon ricoprimento con cardinalità al più p , e consideriamo una varietà con un buon ricoprimento formato da $p+1$ aperti $\{U_0, \dots, U_p\}$. Ora $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ ha un buon ricoprimento con cardinalità p , quindi vale la dualità di Poincaré. Per ipotesi la dualità di Poincaré vale anche per $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1})$ e per U_p , quindi, per il lemma dei cinque, vale per $U_0 \cup \dots \cup U_p$. Questo prova la dualità di Poincaré per ogni varietà orientata e di tipo finito. \square

In realtà la dualità di Poincaré vale anche se M non è di tipo finito, (vedi [Gr], pag.198 e pag.14). L'enunciato è come segue: *se M è una varietà \mathcal{C}^∞ , orientata e di dimensione n , vale*

$$H^q(M) \cong (H_c^{n-q}(M))^*$$

per ogni intero q .

Tuttavia non è sempre vero che $H_c^q(M) \cong (H^{n-q}(M))^*$. L'asimmetria segue dal fatto che il duale di una somma diretta è un prodotto diretto, ma il duale di un prodotto diretto non è una somma diretta.

Corollario 3.2.1 *Se M è una varietà \mathcal{C}^∞ , orientata connessa e di dimensione n , allora $H_c^n(M) = \mathbb{R}$. In particolare, se M è anche compatta, allora $H^n(M) = \mathbb{R}$.*

Osservazione 3.2.2 Avevamo visto nel corollario 2.3.2 che se M è una varietà \mathcal{C}^∞ , orientata, compatta e di dimensione n allora l'applicazione

$$\int_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

è suriettiva. Supponiamo che M sia anche connessa allora, per il corollario precedente, $H^n(M) = \mathbb{R}$, quindi \int_M è un isomorfismo.

Definizione 3.2.4 *Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ , di dimensione n , sia S una sottovarietà chiusa (come sottospazio di M), orientata e di dimensione k e sia $i : S \rightarrow M$ l'inclusione. Definiamo un'applicazione lineare come segue*

$$\int_S : H_c^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \mapsto \int_S i^* \omega.$$

Questa applicazione è ben definita perché

$$\text{supp } \omega|_S \subset (\text{supp } \omega) \cap S,$$

quindi $\omega|_S$ è a supporto compatto. Dalla dualità di Poincaré, secondo cui $(H_c^k(M))^* \cong H^{n-k}(M)$, segue che \int_S corrisponde ad un'unica classe di coomologia $\eta_S \in H^{n-k}(M)$. Chiameremo questa classe e anche ogni forma che la rappresenta, duale di Poincaré chiuso di S . Dalla definizione si ha che η_S è l'unica classe di coomologia in $H^{n-k}(M)$ per cui vale

$$\int_S i^* \omega = \int_M \omega \wedge \eta_S \quad (3.2.1)$$

per ogni $\omega \in H_c^k(M)$.

Definizione 3.2.5 Sia M una varietà C^∞ , di tipo finito e di dimensione n e sia S una sottovarietà compatta, orientata e di dimensione k e sia $i : S \rightarrow M$ l'inclusione. Definiamo l'applicazione lineare

$$\int_S : H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \mapsto \int_S i^* \omega.$$

Per la dualità di Poincaré all'applicazione $\int_S \in (H^k(M))^*$ corrisponde un'unica classe di coomologia $[\eta'_S] \in H_c^{n-k}(M)$ detta duale di Poincaré compatto di S . Il duale di Poincaré compatto è caratterizzato da

$$\int_S i^* \omega = \int_M \omega \wedge \eta'_S \quad (3.2.2)$$

per ogni $\omega \in H^k(M)$.

Osservazione 3.2.3 È chiaro che se S è compatto, è anche chiuso (M è di Hausdorff) quindi esiste anche il duale chiuso di Poincaré di S e, poiché la formula (3.2.2) implica la formula (3.2.1), segue che il duale compatto di S è, come forma, anche il duale chiuso di S , cioè l'applicazione

$$H_c^{n-k}(M) \rightarrow H^{n-k}(M)$$

manda il duale compatto di Poincaré di S nel duale chiuso di Poincaré di S . Quindi il duale di Poincaré chiuso di una sottovarietà compatte e orientata ammette un rappresentante a supporto compatto. Tuttavia come classi di coomologia $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$ e $[\eta'_S] \in H_c^{n-k}(M)$ possono essere piuttosto differenti, come dimostra il seguente esempio.

Esempio 3.2.1 Siano $M = \mathbb{R}^n$ e $S = \{P\}$. Poiché $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$, il duale di Poincaré chiuso η_S è la classe nulla, mentre il duale di Poincaré compatto è una classe non banale in $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

Un altro risultato molto importante per il calcolo della coomologia, la cui dimostrazione si basa ancora una volta, sull'uso della successione di Mayer-Vietoris, è il seguente teorema.

Teorema 3.2.2 (Formula di Künneth) (1) *Siano F e M due varietà \mathcal{C}^∞ , tali che almeno una sia di tipo finito. Allora*

$$H^\bullet(M \times F) = H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F).$$

Questo significa che

$$H^n(M \times \mathbb{R}) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

(2) *Siano M e F due varietà \mathcal{C}^∞ , allora vale*

$$H_c^\bullet(M \times F) = H_c^\bullet(M) \otimes H_c^\bullet(F).$$

Dimostrazione. (1) Supponiamo ad esempio che M sia di tipo finito. Usando i lemma II, III, IV, pag.197, [Gr], si estende tale dimostrazione al caso generale.

Le due proiezioni naturali

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{\rho} & F \\ \pi \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

danno luogo ad un'applicazione sulle forme differenziali

$$\omega \otimes \phi \mapsto \pi^* \omega \wedge \rho^* \phi$$

che induce un'applicazione in coomologia

$$\psi : H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F) \rightarrow H^\bullet(M \times F)$$

definita da

$$\psi([\omega] \otimes [\phi]) = [\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi].$$

Infatti siano $[\omega] \in H^\bullet(M)$ e $[\phi] \in H^\bullet(F)$ allora

$$d(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) = \pi^*(d\omega) \wedge \rho^*\phi + \pi^*\omega \wedge \rho^*d\phi = 0,$$

cioè $\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi$ è una forma chiusa quindi esiste $[\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi] \in H^\bullet(M \times F)$. Inoltre siano

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega + d\eta, \\ \phi' &= \phi + d\mu,\end{aligned}$$

allora si ha

$$\begin{aligned}[\pi^*\omega' \wedge \rho^*\phi'] &= [\pi^*(\omega + d\eta) \wedge \rho^*(\phi + d\mu)] \\ &= [(\pi^*\omega + d(\pi^*\eta)) \wedge (\rho^*\phi + d(\rho^*\mu))] \\ &= [\pi^*\omega + d(\pi^*\eta)] \cdot [\rho^*\phi + d(\rho^*\mu)] \\ &= [\pi^*\omega] \cdot [\rho^*\phi] \\ &= [\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi],\end{aligned}$$

quindi ψ è ben definita. Dimostreremo che ψ è un'isomorfismo.

Se $M = \mathbb{R}^n$, la formula di Künneth è equivalente al lemma di Poincaré (vedi corollario 2.3.3). Sia M qualsiasi e siano $\{U, V\}$ due aperti in M e sia n un intero fissato. Dalla successione di Mayer-Vietoris

$$\dots \longrightarrow H^p(U \cup V) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

si ottiene una successione esatta tensorizzando con $H^{n-p}(F)$

$$\begin{aligned}\dots \longrightarrow H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) &\longrightarrow (H^p(U) \otimes H^{n-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{n-p}(F)) \\ &\longrightarrow H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

perché tensorizzare con uno spazio vettoriale preserva l'esattezza.

Sommando sugli interi p tra zero e n si trova la successione esatta

$$\begin{aligned}
\cdots &\longrightarrow \sum_{p=0}^n H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \\
&\longrightarrow \sum_{p=0}^n (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{n-p}(F) \\
&\longrightarrow \sum_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

Si ha che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{p=0}^n H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) & \xrightarrow{\psi} & H^n((U \cup V) \times F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{p=0}^n (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{n-p}(F) & \xrightarrow{\psi} & H^n(U \times F) \oplus H^n(V \times F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) & \xrightarrow{\psi} & H^n((U \cap V) \times F).
\end{array}$$

La commutatività è chiara eccetto forse per il riquadro

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{n-p}(F) & \xrightarrow{\delta} & \sum_{p=0}^n H^{p+1}(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F) \\
\downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
H^n((U \cap V) \times F) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}((U \cup V) \times F),
\end{array}$$

cosa che ora proveremo. Sia $\omega \otimes \phi \in H^p(U \cup V) \otimes H^{n-p}(F)$. Allora vale

$$\psi \delta(\omega \otimes \phi) = \pi^*(\delta\omega) \wedge \rho^*\phi$$

$$d^*\psi(\omega \otimes \phi) = \delta(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi).$$

Ricordiamo che (vedi teorema 2.1.1) se $\{\rho_U, \rho_V\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U, V\}$ allora

$$\delta\omega = \begin{cases} d(\rho_V\omega) & \text{su } U \\ -d(\rho_U\omega) & \text{su } V. \end{cases}$$

Poiché il pull-back della partizione $\{\pi^*\rho_U, \pi^*\rho_V\}$ è ancora una partizione dell'unità su $(U \cup V) \times F$ subordinata al ricoprimento $\{U \times F, V \times F\}$, su

$(U \cap V) \times F$ si ha

$$\begin{aligned} \delta(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) &= d((\pi^*\rho_U)\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) \\ &= (d\pi^*(\rho_U\omega)) \wedge \rho^*\phi \quad \text{poiché } \phi \text{ è chiusa} \\ &= \pi^*(\delta\omega) \wedge \rho^*\phi. \end{aligned}$$

Quindi il diagramma è commutativo.

Quindi per il lemma dei cinque (vedi proposizione 2.1.1) se il teorema è vero per U , V , e $U \cap V$, allora è vero anche per $U \cup V$. La formula di Künneth si dimostra per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento di M , esattamente come nella dimostrazione della dualità di Poincaré.

(2) In modo analogo si procede per dimostrare la formula di Künneth per la coomologia a supporto compatto. \square

Osservazione 3.2.4 L'isomorfismo ψ della dimostrazione precedente induce su $H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(F)$ un'operazione prodotto che dà una struttura di algebra e rende ψ un isomorfismo di algebre, cioè siano $\omega, \omega' \in H^\bullet(M)$ e $\phi, \phi' \in H^\bullet(F)$

$$\begin{aligned} \psi((\omega \otimes \phi) \cdot (\omega' \otimes \phi')) &= \psi(\omega \otimes \phi) \cdot \psi(\omega' \otimes \phi') \\ &= (\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) \cdot (\pi^*\omega' \wedge \rho^*\phi') \\ &= \pi^*\omega \wedge \rho^*\phi \wedge \pi^*\omega' \wedge \rho^*\phi' \\ &= (-1)^{\deg \omega' \deg \phi} \pi^*(\omega \wedge \omega') \wedge \rho^*(\phi \wedge \phi') \\ &= (-1)^{\deg \omega' \deg \phi} (\omega \wedge \phi) \otimes (\omega' \wedge \phi') \\ &= (-1)^{\deg \omega' \deg \phi} (\omega \cdot \phi) \otimes (\omega' \cdot \phi'). \end{aligned}$$

Esempio 3.2.2 Consideriamo il toro $T = S^1 \times S^1$, di cui abbiamo già calcolato i gruppi di coomologia, usando la formula di Künneth si ha

$$H^\bullet(T) = H^\bullet(S^1 \times S^1) = H^\bullet(S^1) \otimes H^\bullet(S^1),$$

questo dà la struttura di algebra di $H^\bullet(T)$, cioè se $d\theta$ è il generatore della coomologia di S^1 e poniamo

$$\begin{aligned} d\pi^*\theta &= \pi^*d\theta = d\theta_1, \\ d\rho^*\theta &= \rho^*d\theta = d\theta_2, \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} H^1(T) &= \langle d\theta_1 \wedge 1, 1 \wedge d\theta_2 \rangle, \\ H^2(T) &= \langle d\theta_1 \wedge d\theta_2 \rangle, \end{aligned}$$

quindi come algebra anticommutativa $H^\bullet(T)$ è isomorfo a $\Lambda(\mathbb{R}^2)$. In generale si ha che se $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{-volte}}$ allora

$$H^\bullet(T^n) \cong \Lambda(\mathbb{R}^n).$$

3.3 Coomologia di un fibrato vettoriale

I due lemma di Poincaré,

$$H^\bullet(M \times \mathbb{R}) = H^\bullet(M),$$

$$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) = H_c^{\bullet-n}(M),$$

possono essere visti come risultati sulla coomologia del fibrato banale $M \times \mathbb{R}$ su M . Più in generale sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n . Si ha la seguente proposizione.

Proposizione 3.3.1 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale allora π^* induce un isomorfismo in coomologia*

$$H\pi^* : H^\bullet(B) \rightarrow H^\bullet(E),$$

che ha per inversa l'applicazione indotta dalla sezione nulla.

Dimostrazione. Sia s_0 la sezione nulla, allora essendo $\pi s_0 = id$, si ha che $s_0^* \pi^* = id$. Viceversa si ha che la composizione $s\pi$ è omotopa all'identità. Infatti, vediamo E come l'unione disgiunta delle sue fibre e definiamo l'omotopia su ogni fibra come

$$F_x : \xi_x \times \mathbb{R} \rightarrow \xi_x$$

come

$$F_x(y, t) = ty.$$

Dopo di che definiamo

$$F : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$$

come

$$F(y, t) = F_x(y, t)$$

se $y \in \xi_x$. La definizione è ben posta perché ogni punto di E appartiene ad un'unica fibra ed è ovviamente \mathcal{C}^∞ , quindi per 2.3.4 induce l'identità in coomologia. \square

Quindi, per la proposizione appena dimostrata si ha che

$$H^\bullet(E) \cong H^\bullet(B).$$

Si potrebbe pensare che per la coomologia a supporto compatto valga

$$H_c^\bullet(E) \cong H_c^{\bullet-n}(B).$$

In realtà questa formula vale solo nel caso in cui sia E che B siano varietà orientabili di tipo finito. La dimostrazione è basata sulla dualità di Poincaré. Sia m la dimensione di B .

$$\begin{aligned} H_c^\bullet &\cong (H^{m+n-\bullet}(E))^* \text{ per la dualità di Poincaré su } E \\ &\cong (H^{m+n-\bullet}(B))^* \text{ per l'assioma di omotopia della coomologia di De Rham} \\ &\cong H_c^{\bullet-n}(B) \text{ per la dualità di Poincaré su } B. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Esempio 3.3.1 Diamo ora un esempio in cui si vede che la formula (3.3.1) non vale se il fibrato non è orientabile. Consideriamo il gruppo ciclico di ordine due

$$C_2 = \{1, \sigma\},$$

e vediamo S^1 come

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|^2 = 1\}.$$

Consideriamo l'azione di C_2 su S^1 data da

$$\sigma z = z^{-1},$$

si ha che $S^1/C_2 = \mathbb{RP}^1$ e l'applicazione

$$S^1/C_2 \rightarrow S^1$$

definita da

$$[z] \mapsto z^2$$

è un diffeomorfismo. Consideriamo l'azione di C_2 su $S^1 \times \mathbb{R}$ data da

$$(z, t) \mapsto \sigma(z, t) = (z^{-1}, -t),$$

allora il nastro di Möbius si può definire come

$$\mu = (S^1 \times \mathbb{R})/C_2.$$

Sia

$$\pi : \mu \rightarrow S^1$$

l'applicazione definita da

$$[z, t] \mapsto z^2$$

allora dimostriamo che $\xi = (\mu, \pi, S^1)$ è un fibrato vettoriale di rango 1 su S^1 . Consideriamo i tre aperti di S^1

$$\begin{aligned} V_1 &= \{e^{2\pi i\theta} \in S^1 \mid 0 < \theta < \frac{2}{5}\} \\ V_2 &= \{e^{2\pi i\theta} \in S^1 \mid \frac{1}{3} < \theta < \frac{4}{5}\} \\ V_3 &= \{e^{2\pi i\theta} \in S^1 \mid \frac{2}{3} < \theta < \frac{1}{5}\}, \end{aligned}$$

V_1, V_2, V_3 ricoprono S^1 e, poiché è facile verificare che se $z \in V_i$ allora $z^{-1} \notin V_i$ per $i = 1, 2, 3$, si ha che

$$\psi_i : V_i \times \mathbb{R} \rightarrow \mu \big|_{V_i}$$

definita da

$$(z, t) \mapsto [z, t]$$

è un diffeomorfismo. Sia $z \in S^1$ allora

$$\begin{aligned} \xi_z &= \{[w, t] \in \mu \mid w^2 = z\} \\ &= \{[w, t] \in \mu \mid w = \pm z\} \\ &= \{[z, t] \in \mu \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

quindi le fibre sono 1-spazi vettoriali e fissato $z \in U_i$

$$\psi_{i,z}(t) = [z, t]$$

è un'applicazione lineare. Quindi ξ è un fibrato vettoriale di rango 1. Calcoliamo ora la coomologia del nastro di Möbius. Siano

$$\begin{aligned} U &= \frac{S^1 \times \mathbb{R}}{C_2} \setminus \xi_1 \\ V &= \frac{S^1 \times \mathbb{R}}{C_2} \setminus \xi_i. \end{aligned}$$

Allora $\{U, V\}$ è un ricoprimento aperto di μ (perché $1 \neq i^{-1}$).

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
U &= \mu \setminus (\{[1, t], [-1, t]\}) \\
&= \{[z, t] \in \mu \mid \Im(z) > 0\} \\
&\cong \{z \in S^1 \mid \Im(z) > 0\} \times \mathbb{R} \\
&\cong]0, 1[\times \mathbb{R} \quad (\text{tramite la proiezione su } \Re(z)) \\
&\cong \mathbb{R}^2 \\
V &= \mu \setminus (\{[i, t], [-i, t]\}) \\
&= \{[z, t] \in \mu \mid \Re(z) > 0\} \\
&\cong \{z \in S^1 \mid \Re(z) > 0\} \times \mathbb{R} \\
&\cong]0, 1[\times \mathbb{R} \quad (\text{tramite la proiezione su } \Im(z)) \\
&\cong \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

quindi

$$H_c^k(U) = H_c^k(V) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
U \cap V &= \frac{S^1 \times \mathbb{R}}{C_2} \setminus (\xi_1 \cup \xi_i) \\
&= \{[z, t] \in \mu \mid \Im(z) > 0, z \neq i\} \\
&\cong \{z \in S^1 \mid \Im(z) > 0, z \neq i\} \\
&\cong (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\
&= \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

(dove con \sqcup indichiamo l'unione disgiunta) quindi

$$H_c^k(U \cap V) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora consideriamo la successione di Mayer-Vietoris della coomologia a supporto compatto associata a $\{U, V\}$

$$\cdots H^0(U)_c \oplus H^0(V)_c \longrightarrow H_c^0(\mu) \longrightarrow H_c^1(U \cap V) \cdots$$

poiché $H_c^1(U \cap V) = 0 = H_c^0(U) \oplus H_c^0(V)$, si ha che anche $H_c^0(\mu) = 0$. Consideriamo ora il tratto della successione di Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H_c^1(\mu) \xrightarrow{\delta_1^c} H_c^2(U \cap V) \xrightarrow{H^2 k_c} H_c^2(U) \oplus H_c^2(V) \xrightarrow{H^2 i_c} H_c^2(\mu) \longrightarrow 0$$

si ha

$$\begin{aligned}
\dim H_c^2(\mu) &= \dim \operatorname{im} H^2 i_c \\
&= \dim(H_c^2(U) \oplus H_c^2(V)) - \dim \operatorname{im} H^2 k_c \\
&= 2 - [\dim H_c^2(U \cap V) - \dim \operatorname{im} \delta_1^c] \\
&= \dim H_c^1(\mu).
\end{aligned}$$

Dobbiamo vedere come si comporta $H^2 k_c$ sui generatori di $H^2(U \cap V)$. Sappiamo che $U \cap V$ ha due componenti connesse diffeomorfe ad \mathbb{R}^2 che lette in coordinate su U sono

$$\begin{aligned}
C &= \{[z, t] \in \mu \mid \Im(z) > 0, \Re(z) > 0\} \\
C' &= \{[z, t] \in \mu \mid \Im(z) > 0, \Re(z) < 0\},
\end{aligned}$$

mentre lette in coordinate su V sono

$$\begin{aligned}
C &= \{[z, t] \in \mu \mid \Im(z) > 0, \Re(z) > 0\} \\
C' &= \{[z, t] \in \mu \mid \Im(z) < 0, \Re(z) > 0\},
\end{aligned}$$

quindi una forma su C ha la stessa espressione in coordinate sia su U che su V , mentre una forma su C' ha espressioni opposte in coordinate su U e V . Siano ω e ω' due generatori di $H_c^2(U)$ tali che

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} \omega &\subset C \\
\operatorname{supp} \omega' &\subset C',
\end{aligned}$$

e siano ϕ e ϕ' due generatori di $H_c^2(V)$ tali che

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} \phi &\subset C \\
\operatorname{supp} \phi' &\subset C',
\end{aligned}$$

allora si ha che $[\omega \mid_C]$ e $[\phi \mid_C]$ sono due elementi non nulli di $H_c^2(C)$, mentre $[\omega' \mid_{C'}]$ e $[\phi' \mid_{C'}]$ sono due elementi non nulli di $H_c^2(C')$ e vale

$$\begin{aligned}
[\omega \mid_C] &= [\phi \mid_C] \\
[\omega' \mid_{C'}] &= -[\phi' \mid_{C'}].
\end{aligned}$$

Scegliamo come generatori di $H_c^2(U \cap V)$, ad esempio,

$$([\omega \mid_C], 0) \text{ e } (0, [\omega' \mid_{C'}])$$

si ha che:

$$H^2 k_c : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}([\omega |_C], 0) &\mapsto ([k_*^U \omega |_C], -[k_*^V \omega |_C]) = ([\omega], [\phi]) \\ (0, [\omega' |_{C'}]) &\mapsto ([k_*^U \omega' |_{C'}], -[k_*^V \omega' |_{C'}]) = ([\omega], -[\phi])\end{aligned}$$

perché k_*^U e k_*^V sono applicazioni che estendono tramite zero le forme su $U \cap V$ a, rispettivamente, U e V . Quindi $H^2 k_c$ ha rango due, cioè è un isomorfismo da cui

$$\dim H^1(\mu) = \dim \text{im } \delta_1^c = \dim \ker H^2 k_c = 0.$$

In conclusione

$$H_c^k(\mu) = 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z},$$

da cui si desume che la formula (3.3.1) non vale, infatti

$$0 = H_c^2(\mu) \neq H_c^{2-1}(S^1) = H^2(S^1) = \mathbb{R}.$$

Questo corrisponde al fatto che μ non è orientabile.

Lemma 3.3.1 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$, un fibrato vettoriale reale, orientabile, di rango n e sia B , a sua volta, orientabile. Allora E è una varietà orientabile.*

Dimostrazione. Per la proposizione 1.4.1, essendo ξ orientabile, ammette una rappresentazione coordinata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, con trasformazioni coordinate associate $g_{\alpha\beta}$ a determinante positivo. Ora, per un teorema generale sulle varietà, una varietà è orientabile se e solo se possiede un atlante $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ tale che per ogni α e β per cui vale $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, si ha che il determinante jacobiano di $\psi_\alpha \psi_\beta^{-1}$ è positivo. Sia $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ un tale atlante per B che è orientabile (non è restrittivo supporre, eventualmente passando a dei raffinamenti, che il ricoprimento dell'atlante di B sia lo stesso che banalizza ξ). Si ha che un atlante per E è $\{E |_{U_\alpha}, (\psi_\alpha \times id_{\mathbb{R}^n}) \varphi_\alpha^{-1}\}$, allora le funzioni

$$((\psi_\alpha \times id_{\mathbb{R}^n}) \varphi_\alpha^{-1})((\psi_\beta \times id_{\mathbb{R}^n}) \varphi_\beta^{-1})^{-1} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

mandano (x, y) in $(\psi_\alpha \psi_\beta^{-1}(x), g_{\alpha\beta}(\psi_\beta^{-1}(x))(y))$. Quindi la matrice jacobiana associata è

$$\begin{pmatrix} D(\psi_\alpha \psi_\beta^{-1}) & * \\ 0 & g_{\alpha\beta}(\psi_\beta^{-1}(x)) \end{pmatrix},$$

dove $D(\psi_\alpha \psi_\beta^{-1})$ è la matrice jacobiana di $\psi_\alpha \psi_\beta^{-1}$. Il determinante di questa matrice è ovviamente positivo e quindi E è orientabile. L'orientazione su E indotta dall'atlante sopra definito è detta orientazione di prodotto locale. \square

Corollario 3.3.1 *Se $\xi = (E, \pi, B)$ è un fibrato vettoriale orientato e se B è di tipo finito e orientato, allora si ha $H_c^\bullet(E) = H_c^{\bullet-n}(B)$.*

4 Isomorfismo di Thom e classe di Eulero

4.1 Isomorfismo di Thom

Per i fibrati vettoriali si può definire un altro tipo di coomologia: la coomologia a supporto compatto nella direzione verticale.

Nel seguito del capitolo con fibrato vettoriale intenderemo fibrato vettoriale reale. Un fibrato vettoriale complesso dà, per restrizione del campo, un fibrato vettoriale reale.

Definizione 4.1.1 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale. Definiamo il complesso delle forme differenziali a supporto compatto nella direzione verticale, $\Omega_{cv}^\bullet(E)$, nel modo seguente: una n -forma differenziale ω su E appartiene a $\Omega_{cv}^n(E)$ se e solo se per ogni sottoinsieme compatto K di B , si ha $\pi^{-1}(K) \cap \text{supp } \omega$ è compatto o equivalentemente, se e solo se

$$\pi|_{\text{supp } \omega}: \text{supp } \omega \rightarrow B$$

è un'applicazione propria. La coomologia associata a questo complesso, denotata con $H_{cv}^\bullet(E)$ è detta coomologia a supporto compatto nella direzione verticale di E o coomologia compatta verticale di E .

Osservazione 4.1.1 Sia $\omega \in \Omega_{cv}^n(E)$ allora, poiché

$$\text{supp } \omega|_{\xi_x} \subset \text{supp } \omega \cap \xi_x$$

è un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto, si ha che $\text{supp } \omega|_{\xi_x}$ è compatto. Quindi la restrizione di una forma in $\Omega_{cv}^\bullet(E)$ ad ogni fibra ha supporto compatto.

Osservazione 4.1.2 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale. Allora in generale vale $\Omega_c^k(E) \subset \Omega_{cv}^k(E)$ e, in particolare, se B è compatto si ha l'uguaglianza. Infatti, sia ω una forma su E a supporto compatto e sia K un compatto contenuto in B . Allora

$$\text{supp } \omega \cap \pi^{-1}(K) \subset \text{supp } \omega,$$

perciò $\text{supp } \omega \cap \pi^{-1}(K)$ è un sottoinsieme chiuso (perché K è un compatto in uno spazio di Hausdorff e quindi è chiuso, quindi anche $\pi^{-1}(K)$ è chiuso)

di un compatto, quindi è compatto. Supponiamo ora che B sia compatto e sia $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(E)$; allora per definizione si ha che

$$\text{supp } \omega \cap \pi^{-1}(B) = \text{supp } \omega \cap E = \text{supp } \omega$$

è compatto e quindi $\omega \in \Omega_c^\bullet(E)$.

Sia $\xi = (E, \pi, B)$, un fibrato vettoriale orientato e di rango n . Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 3.1.1, vorremmo definire un'applicazione

$$\pi_* : \Omega_{cv}^\bullet(E) \rightarrow \Omega^{\bullet-n}(M).$$

Consideriamo prima il caso di un fibrato banale $E = B \times \mathbb{R}^n$. Siano (t_1, \dots, t_n) coordinate sulle fibre, ossia su \mathbb{R}^n . Analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema 2.3.2 una forma differenziale su E può essere vista come una combinazione lineare di due tipi di forme:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & f(x, t_1, \dots, t_n)(\pi^*\phi) \wedge dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_r} \quad r < n \\ \text{(II)} \quad & f(x, t_1, \dots, t_n)(\pi^*\phi) \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n, \end{aligned}$$

dove ϕ è una forma su B . Definiamo l'applicazione π_* sulle forme di tipo (I) o di tipo (II) nel modo seguente

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & f(x, t_1, \dots, t_n)(\pi^*\phi) \wedge dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_r} \mapsto 0 \quad r < n \quad (4.1.1) \\ \text{(II)} \quad & f(x, t_1, \dots, t_n)(\pi^*\phi) \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \dots dt_n \right) \phi, \end{aligned}$$

poi estendiamo la definizione a tutte le forme per linearità. Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 2.3.2, si vede che, anche se l'espressione di una generica forma come combinazione lineare di forme di tipo (I) e di tipo (II) non è unica, la definizione non risulta ambigua. Inoltre, essendo $\omega = f(x, t_1, \dots, t_n)(\pi^*\phi) \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ a supporto compatto nella direzione verticale, la definizione è ben posta perché f ha supporto compatto per ogni fissato $x \in B$. Ora, sia $\xi = (E, \pi, B)$ un arbitrario fibrato vettoriale orientato, di rango n e con rappresentazione coordinata orientata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$. Su $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, siano $(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$ coordinate locali indotte da φ_α^{-1} . Data una forma $\omega \in \Omega^\bullet(E)$, se indichiamo $\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ con ω_α , si ha che ω_α si può esprimere ancora come una combinazione lineare di forme di

tipo (I) o di tipo (II), dove, questa volta, ϕ è una forma su U_α . Definiamo l'applicazione π_* su ω_α come l'applicazione nulla se ω_α è di tipo (I) e come

$$\pi_*(\omega_\alpha) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \cdots dt_n \right) \phi,$$

se

$$\omega_\alpha = f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) (\pi^* \phi) \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

Infine definiamo

$$\pi_* : \Omega_{cv}^\bullet(E) \rightarrow \Omega^{\bullet-n}(B)$$

come

$$\pi_* \omega(x) = \pi_* \omega_\alpha(x) \quad \text{se } x \in U_\alpha. \quad (4.1.2)$$

Dimostriamo che, data $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(E)$, su $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha $\pi_* \omega_\alpha = \pi_* \omega_\beta$, cioè π_* è ben definita. Siano $(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha, t_1, \dots, t_n)$ e $(x_1^\beta, \dots, x_m^\beta, u_1, \dots, u_n)$ coordinate locali rispettivamente su $\pi^{-1}(U_\alpha)$ e $\pi^{-1}(U_\beta)$, indotte rispettivamente da φ_α^{-1} e φ_β^{-1} . Poiché $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ è una rappresentazione coordinata orientata, le trasformazioni coordinate $g_{\alpha\beta}$ ad essa associate assumono valori in $GL_n(\mathbb{R}^n)^+$ (cioè nell'insieme delle matrici invertibili a determinante positivo). Quindi, fissato $P \in U_\alpha \cap U_\beta$, il cambiamento di coordinate da (u_1, \dots, u_n) a (t_1, \dots, t_n) è individuato da una matrice in $GL_n(\mathbb{R}^n)^+$, sia $A^P = g_{\alpha\beta}(P)$ tale matrice. Fissiamo $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(E)$. In coordinate locali ω_α sarà combinazione lineare di forme di tipo (I) e di tipo (II), quindi, per la linearità di π_* , possiamo supporre semplicemente che ω_α sia o di tipo (I) o di tipo (II). Supponiamo che ω_α sia di tipo (I), cioè che si scriva in coordinate come

$$\omega_\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}} \omega_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} dx_{i_1}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}^\alpha \wedge dt_{j_1} \wedge \cdots \wedge dt_{j_r},$$

con $r < n$. Si ha

$$dt_{j_k} = d((A^P(x)u)_{j_k}) = \sum_{h_k=1}^n d(A_{j_k h_k}^P) u_{h_k} + A_{j_k h_k}^P du_{h_k}$$

quindi

$$\begin{aligned} \omega_\alpha = & \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}} \omega_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} dx_{i_1}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}^\alpha \\ & \wedge \left(\sum_{h_1=1}^n d(A_{j_1 h_1}^P) u_{h_1} + A_{j_1 h_1}^P du_{h_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{h_r=1}^n d(A_{j_r h_r}^P) u_{h_r} + A_{j_r h_r}^P du_{h_r} \right). \end{aligned}$$

Perciò, essendo l'espressione sopra somma di forme al più di grado r in t , si ha che anche ω_β non contiene il termine $du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$, quindi è combinazione lineare di forme di tipo (I), da cui

$$\pi_*\omega_\alpha = 0 = \pi_*\omega_\beta.$$

Invece, supponiamo che ω_α sia di tipo (II). In generale, ω_α avrà un'espressione in coordinate locali del tipo

$$\omega_\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} \omega_{i_1 \dots i_r}^\alpha dx_{i_1}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}^\alpha \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n,$$

ma, ancora una volta per la linearità di π_* , possiamo supporre che

$$\omega_\alpha = f(x, t) dx_{i_1}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}^\alpha \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \pi_*\omega_\alpha(\varphi_\alpha(P)) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \cdots dt_n \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, A_P u) \det A_P du_1 \cdots du_n \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, u) du_1 \cdots du_n \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \\ &= \pi_*\omega_\beta \end{aligned}$$

per il teorema di cambiamento di variabile (essendo $\det A_P > 0$).

Proposizione 4.1.1 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato di rango n e sia*

$$\pi_* : \Omega_{cv}^\bullet(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(B)$$

l'applicazione definita sopra (formula (4.1.2)). Allora π_ è un omomorfismo di catene.*

Dimostrazione. Dimostriamo che π_* è un omomorfismo di catene, cioè che commuta con d . Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata orientata per ξ e fissata $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(E)$, indichiamo $\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$, semplicemente con ω_α . Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$. Data $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(E)$ si ha

$$\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega.$$

Poiché sia d che π_* sono lineari basta provare che

$$d\pi_*(\rho_\alpha\omega) = \pi_*d(\rho_\alpha\omega).$$

Questo equivale a ridursi al caso in cui $E = B \times \mathbb{R}^n$. Se $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(B \times \mathbb{R}^n)$ è una forma di tipo (II), cioè $\omega = f(x, t)(\pi^*\phi) \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$, si ha

$$\begin{aligned} d\pi_*\omega &= d\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \cdots dt_n\right)\phi \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt_1 \cdots dt_n\right) dx_i \wedge \phi + \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \cdots dt_n\right) d\phi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_*d\omega &= \pi_*\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge \pi^*\phi \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n + f\pi^*d\phi \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt_1 \cdots dt_n\right) dx_i \wedge \phi + \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \cdots dt_n\right) d\phi. \end{aligned}$$

Che dimostra l'uguaglianza per le forme di tipo (II). Sia ora

$$\omega = f(x, t)(\pi^*\phi) \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r},$$

con $r < n$, una forma di tipo (I). Si ha

$$d\pi_*\omega = 0$$

e

$$\begin{aligned} \pi_*d\omega &= \pi_*\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge \pi^*\phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}\right. \\ &\quad \left.+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_j} dt_j \wedge \pi^*\phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}\right. \\ &\quad \left.+ f(x, t)\pi^*d\phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}\right) \\ &= (-1)^{\deg(\phi)} \sum_{j=1}^n \pi_*\left(\frac{\partial f}{\partial t_j} dt_j \wedge \pi^*\phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}\right). \end{aligned}$$

Per ogni $i = 1, \dots, n$ ci sono due casi

- se $dt_i \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r} \neq \pm dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$ allora

$$\pi_*\left(\frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \wedge \pi^* \phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}\right) = 0,$$

- se invece, $dt_i \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r} = \pm dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$ allora

$$\pi_*\left(\frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \wedge \pi^* \phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}\right) = \pm \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t_i}(x, t) dt_i dt_{i_1} \cdots dt_{i_r}\right) \phi$$

è ancora zero perché, essendo f a supporto compatto in t , si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t_i}(x, t) dt_i = f(\dots, \eta, \dots) - f(\dots, -\eta, \dots) = 0$$

per $\eta \gg 0$.

Quindi in ogni caso $\pi_* d\omega = 0$ sulle forme di tipo (I). \square

Teorema 4.1.1 (Isomorfismo di Thom) *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato, di rango n . Allora*

$$H\pi_* : H_{cv}^\bullet(E) \rightarrow H^{*-n}(B)$$

è un'isomorfismo.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema alcuni lemma.

Lemma 4.1.1 (1) *(Formula di proiezione) Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato di rango n . Siano τ una forma differenziale su B e ω una forma su E a supporto compatto lungo le fibre. Allora*

$$\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \tau \wedge \pi_* \omega.$$

(2) *Supponiamo inoltre che B sia orientato e di dimensione m . Allora, se orientiamo E con l'orientazione di prodotto locale, si ha*

$$\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge (\pi_* \omega),$$

per ogni $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$ e $\tau \in \Omega_c^{m+n-q}(B)$.

Dimostrazione. (1) Poiché due forme sono uguali se e solo se sono uguali localmente, possiamo assumere che $E = B \times \mathbb{R}^n$. Se ω è una forma di tipo (I), $\omega = f(x, t)\pi^*\phi \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}$, dove $r < n$, allora

$$\pi_*((\pi^*\tau) \wedge \omega) = \pi_*(f(x, t)\pi^*(\tau \wedge \omega) \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}) = 0 = \tau \wedge \pi_*\omega.$$

Se ω è una forma di tipo (II), $\omega = f(x, t)\pi^*\phi \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$, allora

$$\pi_*((\pi^*\tau) \wedge \omega) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \cdots dt_n \right) \tau \wedge \phi = \tau \wedge \pi_*\phi.$$

(2) Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una rappresentazione coordinata orientata per ξ e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$. Scrivendo $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$, dove $\rho_\alpha \omega$ ha supporto in $\pi^{-1}(U_\alpha)$, si ha

$$\int_E (\pi^*\tau) \wedge \omega = \sum_\alpha \int_{\pi^{-1}(U_\alpha)} (\pi^*\tau \wedge (\rho_\alpha \omega))$$

e

$$\int_M \tau \wedge \pi_*\omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \tau \wedge \pi_*(\rho_\alpha \omega).$$

In queste due espressioni $\tau \wedge \pi_*(\rho_\alpha \omega)$ ha supporto compatto perché il suo supporto è un sottoinsieme chiuso dell'insieme compatto $\text{supp } \tau$ e, similmente, anche $\pi^*\tau \wedge (\rho_\alpha \omega)$ ha supporto compatto. Quindi è sufficiente dimostrare la formula per $B = U_\alpha$ e $E = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Per il punto (I) si ha

$$\int_{U_\alpha} \tau \wedge \pi_*(\rho_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} \pi_*((\pi^*\tau) \wedge (\rho_\alpha \omega)).$$

Nel caso in cui ω sia di tipo (I), con calcoli identici a quelli del punto (1), si ha che entrambi gli integrali sono nulli e quindi sono uguali. Se, invece, ω è di tipo (II), $\omega = f(x, t)\pi^*\phi \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{U_\alpha} \pi_*((\pi^*\tau) \wedge (\rho_\alpha \omega)) &= \int_{U_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)\rho_\alpha dt_1 \cdots dt_n \right) \tau \wedge \phi \\ &= \int_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \pi^*\tau \wedge (\rho_\alpha \omega), \end{aligned}$$

per la definizione di integrale su una varietà e per il teorema di Fubini (vedi [Sp], pag.56). \square

Lemma 4.1.2 (Lemma di Poincaré) *Sia B una varietà C^∞ e sia π_* l'applicazione definita in precedenza. Allora*

$$H\pi_* : H_{cv}^\bullet(B \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{\bullet-n}(B)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che, per la proposizione 4.1.1, π_* è un omomorfismo di complessi e quindi induce un omomorfismo $H\pi_*$ in coomologia. Ricordiamo che, essendo $B \times \mathbb{R}^n$ un fibrato banale, π_* è definita semplicemente dalla formula (4.1.1). Sia ora $e = e(t_1, \dots, t_n) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ una n -forma su \mathbb{R}^n a supporto compatto con integrale su \mathbb{R}^n uguale a uno. Consideriamo l'applicazione

$$e_* : \Omega^\bullet(B) \rightarrow \Omega_{cv}^{\bullet+n}(B \times \mathbb{R}^n)$$

definita da

$$\omega \mapsto \pi^* \omega \wedge e.$$

La definizione è ben posta perché da

$$\text{supp}(\pi^* \omega \wedge e) \subset \text{supp } e,$$

segue che $\pi^* \omega \wedge e$ è a supporto compatto e quindi, per l'osservazione 4.1.2, è a supporto compatto nella direzione verticale. Inoltre, per come è definita, e_* commuta con d , quindi induce un omomorfismo in coomologia

$$He_* : H^\bullet(B) \rightarrow H_{cv}^{\bullet+n}(B \times \mathbb{R}^n).$$

Segue direttamente dalla definizione che $\pi_* e_* = id$ su $H^\bullet(B)$. Tuttavia $e_* \pi_* \neq id$, quindi quello che si fa è dimostrare che questa composizione è omotopa all'identità. Come operatore di omotopia si considera:

$$K : \Omega_{cv}^\bullet(B \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega_{cv}^{\bullet-n}(B \times \mathbb{R}^n)$$

definito da

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad f(x, t) \pi^* \phi \wedge dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_r} &\mapsto 0 \quad r < n \\ \text{(II)} \quad f(x, t) \pi^* \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n &\mapsto \left(\int_{A_t} f(x, s) ds \right) \pi^* \phi \\ &\quad - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt \right) \left(\int_{A_t} e(s) ds \right) \pi^* \phi \wedge dt, \end{aligned}$$

dove $dt = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$ e

$$A_t = \{(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } s_i \leq t_i \ i = 1, \dots, n\}.$$

Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 2.3.2, si dimostra che K è in effetti un'omotopia di catene tra $e_*\pi_*$ e l'identità, il che conclude la dimostrazione.

Lemma 4.1.3 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale e siano U, V due aperti di B tali che $B = U \cup V$. Allora la successione di Mayer-Vietoris*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(E) \xrightarrow{i} \Omega^\bullet(\pi^{-1}(U)) \oplus \Omega^\bullet(\pi^{-1}(V)) \xrightarrow{k} \Omega^\bullet(\pi^{-1}(U \cap V)) \longrightarrow 0$$

si restringe alla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \Omega_{cv}^\bullet(E) \xrightarrow{i'} \Omega_{cv}^\bullet(\pi^{-1}(U)) \oplus \Omega_{cv}^\bullet(\pi^{-1}(V)) \xrightarrow{k'} \Omega_{cv}^\bullet(\pi^{-1}(U \cap V)) \longrightarrow 0,$$

dove i' e k' sono le restrizioni di i e k . Questa successione prende il nome di successione di Mayer-Vietoris della coomologia a supporto compatto nella direzione verticale.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare l'esattezza in tre punti. L'iniettività di i' è conseguenza banale dell'iniettività di i . Per quanto riguarda la suriettività di k' , presa $\omega \in \Omega_{cv}^\bullet(\pi^{-1}(U \cap V))$, esiste $\omega' \in \Omega^\bullet(\pi^{-1}(U)) \oplus \Omega^\bullet(\pi^{-1}(V))$ tale che $k(\omega') = \omega$. Basta far vedere che ω' è a supporto compatto nella direzione verticale. Ricordiamo che data ω , si ha che $\omega' = (\omega'_U, \omega'_V)$ è definita come segue (vedi dimostrazione della proposizione 2.1.1)

$$\omega'_V(x) = \begin{cases} \rho_U^E \omega & \text{se } x \in U \cap V \\ 0 & \text{se } x \in V \setminus \text{supp } \rho_U^E \end{cases} \quad \omega'_U(x) = \begin{cases} \rho_V^E \omega & \text{se } x \in U \cap V \\ 0 & \text{se } x \in U \setminus \text{supp } \rho_V^E \end{cases}$$

dove $\{\rho_U^E, \rho_V^E\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)\}$ di E . Si ha

$$\text{supp } \omega'_V \subset \text{supp } \omega$$

quindi $\omega'_V \in \Omega_{cv}^\bullet(\pi^{-1}(V))$ e analogamente $\omega'_U \in \Omega_{cv}^\bullet(\pi^{-1}(U))$, che dimostra che ω' è a supporto compatto nella direzione verticale. Infine, per dimostrare che $\ker k = \text{im } i$, si procede come nel punto due della dimostrazione della proposizione 2.1.1. Si vede facilmente anche che l'omomorfismo di connessione della successione di Mayer-Vietoris della coomologia a supporto compatto nella direzione verticale, è la restrizione alla coomologia a supporto compatto nella direzione verticale, dell'omomorfismo di connessione relativo alla successione di Mayer-Vietoris di H^\bullet . \square

Dimostrazione del teorema 4.1.1. Diamo qui di seguito la dimostrazione del teorema, sotto l'ipotesi che B sia di tipo finito. Una dimostrazione del teorema generale si può trovare in [B-T], teorema 12.2, pag.131-132.

Siano U, V due aperti in B tali che $B = U \cup V$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} H_{cv}^q(\pi^{-1}(U)) \oplus H_{cv}^q(\pi^{-1}(V)) & \xrightarrow{H^q k'} & H_{cv}^q(\pi^{-1}(U \cap V)) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{cv}^{q+1}(E) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ H^{q-n}(U) \oplus H^{q-n}(V) & \xrightarrow{H^{q-n} k} & H^{q-n}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta_{q-n}} & H^{q-n+1}(B) \end{array}$$

e dimostriamo che è commutativo. Inanzitutto fissiamo una partizione dell'unità $\{\rho_U, \rho_V\}$ subordinata al ricoprimento $\{U, V\}$ di M . Allora se definiamo

$$\rho_U^E = \pi^* \rho_U \quad \text{e} \quad \rho_V^E = \pi^* \rho_V$$

si ha che $\{\rho_U^E, \rho_V^E\}$ è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(V)\}$ di E . Si vede banalmente che $\pi_* i' = i \pi_*$ e $\pi_* k' = k \pi_*$. Dimostriamo la commutatività nell'ultimo quadrato. Ricordiamo che, data $\omega \in H_{cv}^q(\pi^{-1}(U \cap V))$, si ha che $\delta_q \omega$ è una forma in $H_{cv}^{q+1}(E)$ tale che

$$\delta \omega |_{\pi^{-1}(U)} = d(\rho_V^E \omega)$$

$$\delta \omega |_{\pi^{-1}(V)} = -d(\rho_U^E \omega).$$

Allora, per la formula di proiezione (vedi 4.1.1), si ha

$$\begin{aligned} (\pi_* \delta \omega) |_{\pi^{-1}(U)} &= \pi_*(\delta \omega |_{\pi^{-1}(U)}) \\ &= \pi_*(d(\rho_V^E \omega)) \\ &= \pi_*(d(\rho_V^E) \wedge \omega) \\ &= \pi_*(\pi^*(d\rho_V) \wedge \omega) \\ &= d(\rho_V) \wedge \pi_* \omega \\ &= (\delta \pi_* \omega) |_U, \end{aligned}$$

analogamente

$$(\pi_* \delta \omega) |_{\pi^{-1}(V)} = (\delta \pi_* \omega) |_V$$

che dimostra la commutatività del diagramma. Se U è diffeomorfo a \mathbb{R}^n allora, per il corollario 1.4.1, la restrizione di ξ a U è il fibrato banale, quindi

per il lemma 4.1.2, si ha che π_* è un isomorfismo. Perciò, nel diagramma sopra π_* è un isomorfismo per gli aperti contraibili. Inoltre, per il lemma dei cinque, se l'isomorfismo di Thom vale per U , V , e $U \cap V$, allora vale per B . Ora procediamo per induzione sul numero degli aperti che costituiscono un buon ricoprimento finito per B . Per $n = 2$, $U \cong V \cong U \cap V \cong \mathbb{R}^n$, e quindi si conclude per quanto detto sopra. Ora supponiamo che (U_0, \dots, U_n) sia un buon ricoprimento per B . Allora $(U_0 \cup \dots \cup U_{n-1}) \cap U_n$ e $(U_0 \cup \dots \cup U_{n-1})$ hanno un buon ricoprimento composto da $n-1$ aperti, quindi, per l'ipotesi induttiva, su $(U_0 \cup \dots \cup U_{n-1}) \cap U_n$ e $(U_0 \cup \dots \cup U_{n-1})$ vale l'isomorfismo di Thom. Inoltre, poiché $U_n \cong \mathbb{R}^n$, si ha che π_* è un isomorfismo anche su U_n , e quindi, per il lemma dei cinque π_* è un isomorfismo su $(U_0 \cup \dots \cup U_{n-1}) \cup U_n = B$. \square

Definizione 4.1.2 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato di rango n . Allora l'isomorfismo inverso di $H\pi_*$ è indicato con

$$\mathcal{T} : H^\bullet(B) \rightarrow H_{cv}^{\bullet+n}(E)$$

ed è detto isomorfismo di Thom.

Definizione 4.1.3 Sia $\xi = (E; \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato, di rango n . Allora, tramite l'isomorfismo di Thom, l'immagine di 1 in $H^0(M)$ determina una classe di coomologia $\Phi = \mathcal{T}(1) \in H_{cv}^n(E)$, chiamata la classe di coomologia di Thom del fibrato vettoriale ξ .

Osservazione 4.1.3 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato, di rango n e sia Φ la classe di Thom di ξ . Allora, poiché $\pi_*\Phi = 1$, per la formula di proiezione (lemma 4.1.1, punto (1))

$$\pi_*(\pi^*\omega \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_*\Phi = \omega.$$

Quindi l'isomorfismo di Thom, che è l'inverso di π_* , è dato da

$$\mathcal{T}(\omega) = \pi^*(\omega) \wedge \Phi.$$

Proposizione 4.1.2 La classe di Thom Φ di un fibrato vettoriale ξ orientato e di rango n può essere caratterizzata come l'unica classe di coomologia in $H_{cv}^n(E)$ (dove E è lo spazio totale di ξ) la cui restrizione ad ogni fibra ξ_x è il generatore canonico di $H_c^n(\xi_x)$.

Dimostrazione. Poiché $\pi_*\Phi = 1$, si ha che $\Phi|_{\xi_x}$ è una forma a supporto compatto (vedi 4.1.1) con integrale uno su ξ_x , quindi (vedi osservazione 3.1.3) è il generatore di $H_c^n(\xi) \cong H_c^n(\mathbb{R}^n)$. Viceversa, supponiamo che $\Phi' \in H_{cv}^n(E)$ si restringa al generatore su ogni fibra, allora

$$\pi_*((\pi^*\omega) \wedge \Phi') = \omega \wedge \pi_*\Phi' = \omega.$$

Quindi $\pi^*(\) \wedge \Phi'$ deve essere l'isomorfismo di Thom \mathcal{T} e $\Phi' = \mathcal{T}(1)$ è la classe di Thom. \square

Proposizione 4.1.3 *Siano $\xi = (E, \pi, M)$ e $\xi' = (E', \pi', M)$ due fibrati vettoriali orientati e consideriamo la loro somma di Whitney $\xi \oplus \xi'$ (vedi paragrafo 1.2 punto 3). Abbiamo le proiezioni*

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\pi'} & E' \\ \pi \downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

Allora, se fissiamo su $\xi \oplus \xi'$ l'orientazione canonica di somma di Whitney (vedi esempio 1.4.1) e se indichiamo con $\Phi(\xi \oplus \xi')$ la classe di Thom di $\xi \oplus \xi'$ vale

$$\Phi(\xi \oplus \xi') = \pi^*\Phi(\xi) \wedge \pi'^*\Phi(\xi').$$

Dimostrazione. Sia m il rango di ξ e sia n quello di ξ' . Allora si ha che $\pi^*\Phi(\xi) \wedge \pi'^*\Phi(\xi')$ è una classe in $H_{cv}^{m+n}(E \oplus E')$ la cui restrizione ad ogni fibra è il generatore della coomologia a supporto compatto della fibra, perché l'isomorfismo

$$H_c^{m+n}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \cong H_c^m(\mathbb{R}^m) \otimes H_c^n(\mathbb{R}^n)$$

è dato dal prodotto esterno dei generatori (vedi teorema 3.2.2). \square

4.2 Dualità di Poincaré e classe di Thom

Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ , di dimensione n , sia S una sottovarietà chiusa, orientata e di dimensione k . Ricordiamo (vedi definizione 3.2.4), che il duale di Poincaré di S è la classe di coomologia della $(n-k)$ -forma differenziale chiusa η_S caratterizzata da

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_S,$$

per ogni $\omega \in H_c^k(M)$. In questo paragrafo spiegheremo come il duale di Poincaré di una sottovarietà S è legato alla classe di Thom di un fibrato. Per fare questo, introduciamo la nozione di intorno tubolare di S in M .

Definizione 4.2.1 *Sia M una varietà C^∞ , di dimensione n , sia S una sottovarietà di dimensione k . Un intorno tubolare di S in M è un'intorno aperto di S in M diffeomorfo allo spazio totale E di un fibrato vettoriale di rango $n - k$ su S , in modo che se indichiamo con ψ il diffeomorfismo tra T e E , con i l'inclusione di S in T e con s la sezione nulla, allora il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{id} & S \\ i \downarrow & & \downarrow s \\ T & \xrightarrow{\psi} & E \end{array}$$

commuta.

Definizione 4.2.2 *Una successione di fibrati vettoriali su una varietà C^∞ M ,*

$$0 \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi' \longrightarrow \xi'' \longrightarrow 0,$$

è detta esatta se per ogni $x \in M$ la successione di spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow \xi_x \longrightarrow \xi'_x \longrightarrow \xi''_x \longrightarrow 0$$

è esatta.

Sia M una varietà C^∞ e sia S una sua sottovarietà, ricordiamo che il fibrato normale a S in M è definito come (vedi esempio 1.2.1)

$$N = N_{S/M} = \frac{TM|_S}{TS},$$

dove TS è il fibrato tangente ad S e $TM|_S$ è la restrizione a S del fibrato tangente ad M . Allora si ha che la seguente successione è esatta

$$0 \longrightarrow TS \longrightarrow TM|_S \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Teorema 4.2.1 (Teorema dell'Intorno Tubolare) *Sia M una varietà C^∞ e sia S una sottovarietà. Allora esiste un intorno tubolare T di S e T è in effetti diffeomorfo al fibrato normale a S in M .*

Per la dimostrazione si veda [G-P], pag.76.

Proposizione 4.2.1 *Sia M una varietà C^∞ , orientata, n -dimensionale e sia S una sua sottovarietà, chiusa, orientata e di dimensione k . Sia poi, $j : T \hookrightarrow M$, l'inclusione di un intorno tubolare T di S in M . Poiché sia S che M sono orientabili, il fibrato normale $N_{S/M}$, essendo il quoziente di $TM|_S$ su TS , è orientabile e, per convenzione, supponiamo abbia l'orientazione indotta da quella fissata su $TM|_S$ e su TS (vedi esempio 1.4.2), dove l'orientazione su $TM|_S$ è indotta dall'orientazione su TM . Allora possiamo applicare l'isomorfismo di Thom al fibrato normale $T = N_{S/M}$ e in tal modo otteniamo la successione di applicazioni*

$$H^\bullet(S) \xrightarrow{\wedge \Phi} H_{cv}^{\bullet n-k}(T) \xrightarrow{j_*} H^{\bullet n-k}(M),$$

dove Φ è la classe di Thom di T e j_* è l'estensione tramite zero. Si ha che il duale di Poincaré η_S di S è la classe di Thom Φ del fibrato normale a S in M . Più precisamente si ha

$$\eta_S = j_*(1 \wedge \Phi) = j_*\Phi.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che j_* è definita perché abbiamo a che fare con forme su T che si annullano vicino alla frontiera di T . Per provare la proposizione è sufficiente far vedere che $j_*\Phi$ soddisfa la proprietà che definisce il duale di Poincaré ricordata sopra. Sia $[\omega] \in H_c^k(M)$ e sia $i : S \hookrightarrow T$ l'inclusione, vista come la sezione nulla del fibrato vettoriale $\pi : T \rightarrow S$. Poiché π è una retrazione per deformazione di T su S , si ha che π^* e i^* inducono isomorfismi inversi in coomologia. Quindi le forme ω e $\pi^*i^*\omega$ differiscono per una forma esatta cioè

$$\omega = \pi^*i^*\omega + d\tau.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_M \omega \wedge j_* \Phi &= \int_T \omega \wedge \Phi \quad \text{perché } \text{supp } j_* \Phi \subset T \\
&= \int_T (\pi^* i^* \omega + d\tau) \wedge \Phi \\
&= \int_T (\pi^* i^* \omega) \wedge \Phi \\
&\quad (\text{perché } \int_T (d\tau) \wedge \Phi = \int_T d(\tau \wedge \Phi) = 0 \text{ per il teorema di Stokes}) \\
&= \int_S i^* \omega \wedge \pi_* \Phi \quad \text{per il lemma 4.1.1 punto (2)} \\
&= \int_S i^* \omega \quad \text{perché } \pi_* \Phi = 1.
\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. Si noti che se S è compatto, allora il suo duale di Poincaré $\eta_S = j_* \Phi$ ha supporto compatto. \square

Al contrario supponiamo che $\xi = (E, \pi, M)$ sia un fibrato vettoriale orientato e sia M una varietà orientata. Allora la sezione nulla immerge diffeomorficamente M in E e c'è una successione esatta

$$0 \longrightarrow TM \longrightarrow TE|_M \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

cioè il fibrato normale a M in E è E stesso (basta osservare che localmente $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^q$ quindi $TE|_{U_\alpha} \cong TU_\alpha \oplus \mathbb{R}^q$). Per la proposizione precedente il duale di Poincaré di M in E è la classe di Thom di ξ . Riassumendo

Proposizione 4.2.2 (1) *Sia S una sottovarietà chiusa e orientata di una varietà orientata M , allora, una volta fissato un'intorno tubolare T di S , il duale di Poincaré di S e la classe di Thom del fibrato normale a S , possono essere rappresentati da forme differenziali, rispettivamente, η_S e Φ , tali che*

$$\eta_S = \psi^* \Phi,$$

dove ψ è il diffeomorfismo tra T e lo spazio totale del fibrato normale a S in M .

(2) *La classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato $\xi = (E, \pi, M)$, con M varietà orientata, e il duale di Poincaré della sezione nulla di ξ , possono essere rappresentati dalla stessa forma.*

Esempio 4.2.1 Sia M una varietà C^∞ , di dimensione n , vogliamo calcolare il duale di Poincaré di un punto P in M . Un intorno tubolare T di P è semplicemente un disco aperto di dimensione n intorno a P . Un generatore di $H_{cv}^n(T)$ è una n -forma con integrale totale 1. Quindi il duale di Poincaré di P in M è una n forma a supporto compatto su M con integrale totale 1.

Proposizione 4.2.3 (Principio di localizzazione) *Il rappresentante del duale di Poincaré di una sottovarietà S può essere scelto in modo tale che il suo supporto sia contenuto in ogni dato intorno tubolare di S .*

Usando la costruzione esplicita del duale di Poincaré come la classe di Thom del fibrato normale, proveremo una proprietà della dualità di Poincaré.

Definizione 4.2.3 *Sia M una varietà C^∞ . Date R e S , sottovarietà di M , si dice che R e S si intersecano trasversalmente se*

$$T_x R + T_x S = T_x M$$

per ogni $x \in R \cap S$. Per una tale intersezione trasversale la codimensione in M è additiva (vedi [G-P], pp.27-32), cioè vale

$$\text{codim } R \cap S = \text{codim } R + \text{codim } S.$$

Questo implica che il fibrato normale a $R \cap S$ in M sia

$$N_{R \cap S / M} = N_{R/M} \oplus N_{S/M}.$$

Proposizione 4.2.4 *Attraverso la dualità di Poincaré l'intersezione trasversale di sottovarietà chiuse e orientate corrisponde al prodotto esterno di forme differenziali.*

Dimostrazione. Sia M una varietà orientata e siano R e S sue sottovarietà chiuse e orientate di M che si intersecano trasversalmente. Fissiamo su $N_{R \cap S / M}$ l'orientazione canonica di somma di Whitney $N_{R/M} \oplus N_{S/M}$, dove $N_{S/M}$ e $N_{R/M}$ hanno l'orientazione indotta dalla struttura di fibrato quoziente. Se denotiamo la classe di Thom di un fibrato vettoriale ξ con $\Phi(\xi)$, allora per la proposizione 4.1.3 si ha

$$\Phi(N_{R \cap S / M}) = \Phi(N_{R/M} \oplus N_{S/M}) = \Phi(N_{R/M}) \wedge \Phi(N_{S/M}),$$

quindi

$$\eta_{R \cap S} = \eta_R \wedge \eta_S. \quad \square$$

4.3 Classe di Eulero

Definizione 4.3.1 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n e sia $\Phi \in H_{cv}^n(E)$ la sua classe di Thom. La classe di Eulero del fibrato ξ è la classe di coomologia $e(\xi) \in H^n(B)$, tale che

$$e(\xi) = H^n s_0^* j_* \Phi,$$

dove s_0 è la sezione nulla del fibrato ξ e $j_* : H_{cv}^\bullet(E) \rightarrow H^\bullet(E)$ è definita da

$$j_*[\omega] = [\omega].$$

Definizione 4.3.2 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato di rango k su una base B orientata, compatta e di dimensione k . Allora $H^k(B) \cong \mathbb{R}$ e quindi la classe di Eulero $e(\xi)$ di ξ può essere identificata con il numero reale $\int_M e(\xi)$ che prende il nome di numero di Eulero di ξ . In particolare se M è una varietà compatta e orientata il numero di Eulero di M è il numero di Eulero relativo al fibrato tangente a M .

Osservazione 4.3.1 Poiché, come abbiamo visto nella proposizione 3.3.1, dato un fibrato vettoriale $\xi = (E, \pi, B)$, la proiezione induce un isomorfismo in coomologia con inversa l'applicazione indotta dalla sezione nulla, si ha che la classe di Eulero di ξ può essere caratterizzata come l'unica classe $e(\xi) \in H^n(B)$ tale che

$$H^n \pi^* e(\xi) = j_* \Phi,$$

dove Φ è la classe di Thom di ξ .

Proposizione 4.3.1 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale e sia s_0 la sezione nulla. Sia s un'altra sezione di ξ , allora s è omotopa a s_0 .

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$F : B \times \mathbb{R} \rightarrow E$$

definita da

$$F(x, t) = ts(x).$$

Chiaramente F è \mathcal{C}^∞ e, per t fissato, $F(x, t) \in \xi_x$. Inoltre

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= 0_x = s_0(x) \\ F(x, 1) &= s(x). \end{aligned}$$

Quindi F è un'omotopia tra s_0 e s . \square

Osservazione 4.3.2 Si noti che se s è una sezione di un dato fibrato vettoriale ξ per definizione si ha che $\pi s = id$, quindi s induce in coomologia un'inversa per $H\pi^*$, perciò la classe di Eulero di ξ è data da

$$e = H^n s^* j^* \Phi,$$

dove Φ è la classe di Thom di ξ .

Definizione 4.3.3 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale e sia s una sezione. Diciamo che $x \in B$ è uno zero di s se e solo se $s(x) = 0$.

Lemma 4.3.1 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale di rango n su una base B compatta, sia g una metrica Riemanniana su ξ e sia $\|\cdot\|$ la norma essa associata. Sia U un intorno della sezione nulla in E . Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che dato $y \in E$ se $\|y\| < \epsilon$ allora $y \in U$.

Dimostrazione. Scegliamo una rappresentazione coordinata Riemanniana per ξ (per l'esistenza vedi la proposizione 1.4.2), cioè una rappresentazione le cui applicazioni conservano la norma. Sia $x \in B$ allora esiste un intorno aperto V_x di x in B tale che V_x è contenuto in un aperto trivializzante per ξ e quindi $\pi^{-1}(V_x) \cong V_x \times \mathbb{R}^n$. Perciò, eventualmente restringendo V_x , possiamo supporre che esista un $\epsilon_x > 0$ tale che per ogni fissato $y \in \pi^{-1}(V_x)$ se $\|y\| < \epsilon_x$ allora $y \in U \cap \pi^{-1}(V_x)$. Consideriamo ora $\{V_x\}_{x \in B}$, questo è un ricoprimento aperto di B che è compatto, quindi esiste un sottoricoprimento finito cioè esistono k -punti in B x_1, \dots, x_k tali che $B = \cup_{i=1}^k V_{x_i}$, quindi $E = \cup_{i=1}^k \pi^{-1}(V_{x_i})$. Definiamo

$$\epsilon = \min_{i=1, \dots, k} \epsilon_{x_i},$$

allora ϵ soddisfa le richieste del lemma. \square

Proposizione 4.3.2 Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientabile di rango k su una base B compatta e sia Φ la classe di Thom ad esso associata. Se s è una sezione di ξ con un numero finito di zeri x_1, \dots, x_n allora il supporto della classe di Eulero di ξ può essere localizzato all'interno di n dischi aperti arbitrariamente piccoli D_1, \dots, D_n tali che $x_i \in D_i$.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che, essendo B compatto, la classe di Thom è rappresentata da una forma a supporto compatto (vedi

osservazione 4.1.2). Sia Φ una forma che rappresenta la classe di Thom e , per ogni costante reale positiva R , consideriamo l'applicazione

$$\mu_R : E \rightarrow E$$

definita da

$$y \mapsto Ry.$$

Allora, se poniamo $\mu_R^* \Phi = \Phi_R$, si ha che

$$\Phi_R \subset \mu_R^{-1} \text{supp } \Phi = \frac{1}{R} \text{supp } \Phi.$$

Inoltre Φ_R è ancora un rappresentante della classe di Thom di ξ in quanto la restrizione di Φ_R ad ogni fibra è una forma a supporto compatto con integrale totale sulla fibra uno, cioè è un generatore di $H_c^k(\xi_x)$. Consideriamo, d'altra parte, $B' = B \setminus (\cup_{i=1}^n D_i)$; questo è un chiuso in B e quindi è compatto, perciò $s(B')$ è un compatto in E che non interseca la sezione zero in quanto, per ipotesi, $s(x) \neq 0$ per ogni $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Essendo E di Hausdorff, $s(B')$ è chiuso in E , quindi esiste un intorno aperto U della sezione nulla che non interseca $s(B')$. Ora fissiamo una metrica su ξ e applichiamo il lemma 4.3.1 a U , cioè sia $\epsilon > 0$ tale che per ogni $y \in E$ se $\|y\| < \epsilon$ allora $y \in U$. Essendo $\text{supp } \Phi$ compatto esiste

$$\max_{y \in \text{supp } \Phi} \|y\| = M,$$

quindi scegliendo $R > \frac{M}{\epsilon}$, si ha che

$$\max_{y \in \text{supp } \Phi_R} \|y\| \leq \frac{1}{R} (\max_{y \in \text{supp } \Phi} \|y\|) = \frac{M}{R} < \epsilon,$$

perciò si ha che $\text{supp } \Phi_R \subset U$, da cui $\text{supp } \Phi \cap s(B') = \emptyset$. In conclusione, se $e(\xi)$ è una forma che rappresenta la classe di Eulero, si ha

$$\text{supp } e(\xi) = \text{supp } s^* \Phi_R \subset s^{-1}(\text{supp } \Phi_R) \subset B \setminus B' = \cup_{i=1}^n D_i. \quad \square$$

Definizione 4.3.4 *Siano M e N due varietà C^∞ , orientate e di dimensione n , sia M compatta e sia N connessa. Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ . Il grado di f è*

$$\text{deg } f = \int_M f^* \omega,$$

dove $[\omega]$ è un generatore di $H_c^n(N)$.

Proposizione 4.3.3 *Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ tra due varietà C^∞ , orientate e di dimensione n , sia M compatta e N connessa. Allora se f non è suriettiva il grado di f è zero.*

Essendo M compatto, l'immagine di f è un compatto in N , che è uno spazio di Hausdorff, quindi è chiusa in N . Sia ora $P \in N \setminus \text{im } f$, allora esiste un intorno aperto U di P tale che $U \subset N \setminus \text{im } f$. Sia ω un generatore di $H_c^n(N) \cong \mathbb{R}$ il cui supporto sia contenuto in U , allora

$$\deg f = \int_M f^* \omega = 0. \quad \square$$

Definizione 4.3.5 (1) *Sia M una varietà C^∞ . Un sottoinsieme S di M è detto di misura nulla se può essere coperto da un numero numerabile di aperti coordinati U_i tali che $\varphi_i(U_i \cap S)$ sia un insieme di misura nulla in \mathbb{R}^n (dove le applicazioni φ_i sono le carte su U_i).*

(2) *Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione C^∞ tra varietà C^∞ . Un punto $P \in M$ è detto punto critico per f se l'applicazione $d_P f : T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$ non è suriettiva. L'immagine di un punto critico è detta valore critico, mentre un punto di N che non è immagine di un punto critico è detto valore regolare di f .*

Teorema 4.3.1 (Teorema di Sard) *Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ tra varietà C^∞ . L'insieme dei valori critici di f è un insieme di misura nulla in N .*

Per la dimostrazione vedi [Sa].

Proposizione 4.3.4 *Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ tra due varietà C^∞ , orientate e di dimensione n , sia M compatta e sia N connessa. Allora in grado di f è un numero intero.*

Dimostrazione. Per la proposizione 4.3.3 possiamo ridurci al caso in cui f è suriettiva. Per il teorema di Sard quasi tutti i punti in N sono valori regolari di f . Sia $P \in N$ un tale punto. Per ipotesi la controimmagine di P è diversa dal vuoto. Sia $Q_1 \in M$ un punto nella controimmagine di P . Allora, per ipotesi l'applicazione $d_{Q_1} f : T_{Q_1} M \rightarrow T_P N$ è suriettiva quindi, avendo M e N la stessa dimensione, è un isomorfismo. Perciò esiste un intorno di Q_1 su cui f è un diffeomorfismo (segue dal teorema di invertibilità locale, vedi [Sp], pag.35). Allora, per la compattezza di M si ha che la controimmagine

di P deve essere un insieme finito di punti. Infatti se $f^{-1}(\{P\})$ fosse infinito, dovrebbe avere un punto di accumulazione Q_0 (perché un insieme infinito in un compatto ammette sempre un punto di accumulazione) e Q_0 , per la continuità di f , dovrebbe stare nella controimmagine di P , ma è ovvio che in tal caso f non sarebbe un diffeomorfismo locale intorno a Q_0 , il che è assurdo. Sia quindi $\{Q_1, \dots, Q_k\}$ la controimmagine di P . Scegliamo un generatore α di $H_c^n(N)$ il cui supporto sia localizzato vicino a P . Allora $f^*\alpha$ è una n forma il cui supporto è localizzato intorno ai punti Q_i . Inoltre l'integrale è invariante a meno del segno per diffeomorfismi. Quindi si ha

$$\deg f = \int_M f^*\alpha = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*\alpha = \sum_{i=1}^k \pm 1,$$

dove ± 1 è determinato in base al segno del determinante di $d_{Q_i}f$. Quindi $\deg f \in \mathbb{Z}$. \square

Vogliamo dare una definizione di grado locale. Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ , orientata, di dimensione n e sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione \mathcal{C}^∞ . Sia $P \in M$ tale che $f(P) = 0$ e P sia uno zero isolato di f . Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una carta locale orientata su P e fissato $\delta \in \mathbb{R}$ positivo, indichiamo con $D(P, \delta)$ il disco di centro l'origine e raggio δ (rispetto alla metrica indotta su U_α da φ_α^{-1}) con δ sufficientemente piccolo in modo tale che

$$f^{-1}(\{0\}) \cap \overline{D(P, \delta)} = \{P\}.$$

Un tale δ esiste perché P è uno zero isolato di f . Scelto $\epsilon \in \mathbb{R}$ positivo e opportunamente piccolo, sia $r(\epsilon)$ il minimo reale positivo tale che

$$f^{-1}(D(0, \epsilon)) \cap D(P, \delta) \subset \overline{D(P, r(\epsilon)/2)},$$

allora si ha che

$$r(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Infatti $r(\epsilon)$ è una funzione decrescente di ϵ quindi esiste il limite di $r(\epsilon)$ per ϵ che tende a zero. Sia l tale limite. Allora $l \geq 0$; supponiamo per assurdo che $l > 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $P_0 \in f^{-1}(D(0, \epsilon)) \cap D(P, \delta)$ tale che $P_0 \notin D(P, l/3)$ (ho scelto come raggio $l/3$ semplicemente perché $l/3 < l/2$). Se scegliamo $\epsilon = \frac{1}{n}$ otteniamo una successione di punti P_n in $\overline{D(P, \delta)}$. Ma essendo $\overline{D(P, \delta)}$ compatto esiste una sottosuccessione P_{n_k} che converge a $Q \in \overline{D(P, \delta)}$. Allora, per la continuità di f , deve valere

$$f(P_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(Q),$$

ma questo è assurdo perché per costruzione $f(P_{n_k}) \in D(0, \frac{1}{n_k})$, quindi $f(P_{n_k})$ tende a 0 per $k \rightarrow \infty$, mentre $f(Q) \neq 0$ per l'ipotesi fatta su $\overline{D(P, \delta)}$. Fissiamo ϵ in modo che $r(\epsilon) < \delta/2$ e consideriamo ora $\omega \in \Omega_c^n(D(0, \epsilon))$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1$. Si ha che

$$\text{supp}(f^*\omega) \cap D(P, \delta) = \text{supp}(f^*\omega) \cap \overline{D(P, r(\epsilon))} \subset \overline{D(P, \delta/2)}$$

che è un chiuso in un compatto e quindi compatto; perciò è ben definito

$$\int_{D(P, \delta)} f^*\omega.$$

In primo luogo facciamo vedere che, fissati δ , ϵ e $r(\epsilon)$, l'integrale non dipende dalla scelta di ω . Sia ω' un'altra n -forma a supporto compatto in $D(0, \epsilon)$ e con integrale totale uno. Allora $[\omega] = [\omega'] \in H_c^n(D(0, \epsilon))$ cioè

$$\omega = \omega' + d\eta$$

con η a supporto compatto in $D(0, \epsilon)$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{D(P, \delta)} f^*\omega &= \int_{D(P, \delta)} f^*(\omega' + d\eta) \\ &= \int_{D(P, \delta)} f^*\omega' + \int_{D(P, \delta)} d(f^*\eta) \\ &= \int_{D(P, \delta)} f^*\omega' + \int_{\partial(D(P, \delta))} f^*\eta \\ &\quad \text{(per il teorema di Stokes)} \\ &= \int_{D(P, \delta)} f^*\omega', \end{aligned}$$

perché per costruzione il supporto di $f^*\eta$ è strettamente contenuto in $D(P, \delta)$. Ora facciamo vedere che l'integrale non dipende neanche dalla scelta di δ , ϵ e $r(\epsilon)$; infatti, osservando che tutte le n -forme a supporto compatto su \mathbb{R}^n con integrale totale uno stanno nella stessa classe di coomologia (quindi differiscono per una forma a supporto compatto su \mathbb{R}^n) e che abbiamo a che fare con dischi concentrici, quindi contenuti gli uni negli altri (cioè ad esempio se $\epsilon < \epsilon'$ si ha $D(0, \epsilon) \subset D(0, \epsilon')$), ci si riconduce al caso sopra. Infine si ha che la definizione di grado locale non dipende neanche dal

sistema di coordinate scelto su U_α infatti supponiamo che φ_β sia un altro sistema di coordinate orientato allora $\varphi_\beta(D(P, \delta))$ non sarà necessariamente un disco in \mathbb{R}^n , ma essendo un aperto in \mathbb{R}^n esisterà un disco $D(\varphi_\beta(P), \delta')$ contenuto in $\varphi_\beta(D(P, \delta))$ e quindi posso ripetere lo stesso ragionamento su $\varphi_\beta^{-1}(D(\varphi_\beta(P), \delta'))$.

Definizione 4.3.6 *Sia M una varietà C^∞ , orientata, di dimensione n , sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione C^∞ e sia $P \in M$ uno zero isolato di f . Allora fissati δ, ϵ e $r(\epsilon)$ come sopra definiamo il grado locale di f in P come*

$$\deg_P f = \int_{D(P, \delta)} f^*(\omega),$$

dove $\omega \in \Omega_c^n(D(0, \epsilon))$ ha integrale totale uno su \mathbb{R}^n .

Proposizione 4.3.5 *Sia M una varietà C^∞ , orientata, di dimensione n e sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione C^∞ . Allora se $P \in M$ è uno zero isolato di f il grado locale di f in P è un numero intero.*

Dimostrazione. Sia $\delta \in \mathbb{R}$ positivo tale che

$$\overline{D(P, \delta)} \cap f^{-1}(\{0\}) = \{P\}.$$

Siano poi $\epsilon, r \in \mathbb{R}$ positivi tali che

$$f^{-1}(D(0, \epsilon)) \cap D(P, \delta) \subset \overline{D(P, r/2)},$$

con $r < \delta/2$. Sia Q un valore regolare per f in $D(0, \epsilon)$ (esiste per il teorema di Sard) allora per ogni $Q_1 \in f^{-1}(Q) \cap D(P, \delta)$ si ha che l'applicazione $d_{Q_1} : T_{Q_1}M \rightarrow T_Q\mathbb{R}^n$ è suriettiva quindi, avendo M e \mathbb{R}^n la stessa dimensione, è un isomorfismo. Perciò esiste un intorno U_1 di Q_1 su cui f è un diffeomorfismo (segue dal teorema di invertibilità locale) e, eventualmente restringendo tale intorno, possiamo supporre che esso sia contenuto in $D(P, \delta)$. Si ha che l'insieme $f^{-1}(Q) \cap D(P, \delta)$ è finito; infatti supponiamo per assurdo che sia infinito, allora, essendo per ipotesi $f^{-1}(D(0, \epsilon)) \cap D(P, \delta) \subset \overline{D(P, r/2)}$, tale insieme deve possedere un punto di accumulazione S in $\overline{D(P, r/2)} \subset D(P, \delta)$, perché tale insieme è compatto e ogni insieme infinito in un compatto possiede un punto di accumulazione; per la continuità di f , si ha che $f(S) = Q$, ma chiaramente non può esistere un intorno di S su cui f sia un diffeomorfismo il che è assurdo. Sia

$$\{Q_0, \dots, Q_k\} = f^{-1}(Q) \cap D(P, \delta).$$

Scegliamo un generatore ω di $H_c^n(D(0, \epsilon))$ il cui supporto sia localizzato intorno a Q e con integrale totale uno su \mathbb{R}^n . Allora $f^*\omega$ è una forma il cui supporto è localizzato intorno ai punti che stanno nella controimmagine di Q e quindi in particolare $\text{supp}(f^*\omega) \cap D(P, \delta)$ è localizzato intorno ai Q_i , su cui f è un diffeomorfismo. Inoltre l'integrale è invariante a meno del segno per diffeomorfismi. Quindi si ha

$$\deg_P f = \int_{D(P, \delta)} f^*\omega = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*\omega = \sum_{i=1}^k \pm 1,$$

dove ± 1 è determinato in base al segno del determinante di $d_{Q_i}f$. Quindi $\deg_P f \in \mathbb{Z}$. \square

Definizione 4.3.7 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale, sia s una sezione e sia $P \in B$ uno zero isolato di s , allora definiamo la molteplicità di zero di s in P come il grado locale in P della composizione*

$$U \xrightarrow{s|_U} E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^n,$$

dove U è un intorno aperto di P contenuto in un aperto trivializzante per ξ e p_2 è la proiezione sul secondo fattore.

Teorema 4.3.2 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato e di rango n , sia B compatto, orientato, di dimensione n e sia s una sezione con un numero finito di zeri. Allora la classe di Eulero di ξ è la somma dei duali di Poincaré degli zeri di s contati con molteplicità.*

Dimostrazione. Siano $\{P_0, \dots, P_k\}$ gli zeri di s . Fissata una metrica Riemanniana su B , scegliamo una rappresentazione coordinata Riemanniana orientata $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ per ξ e sia fissata su E l'orientazione di prodotto locale. Per ogni $i = 1, \dots, k$, fissiamo un intorno aperto $D_i = D(P_i, \delta_i)$ di P_i , tale che D_i sia contenuto in un aperto trivializzante per ξ e gli aperti D_i siano disgiunti. Vogliamo calcolare la molteplicità di zero di s in P_i , questa è per definizione il grado locale in P_i della composizione

$$D_i \xrightarrow{s|_{D_i}} E|_{D_i} \cong D_i \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^n,$$

(come intorno U di P_i in B possiamo scegliere direttamente D_i). Vediamo come si scrive p_2 in coordinate locali: sia α_i tale che $D_i \subset U_{\alpha_i}$, allora

$$(\varphi_{\alpha_i})|_{D_i}: D_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow E|_{D_i}$$

è un diffeomorfismo e $E|_{D_i}$ si può vedere come l'unione disgiunta per $x \in D_i$ di ξ_x ; si ha che

$$p_2 : E|_{D_i} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è definito da

$$p_2(x, y) = \varphi_{\alpha_i, x}^{-1}(y),$$

dove $x \in D_i$ e $y \in \xi_x$. Ora fissiamo ϵ_i e r_i in modo che

$$p_2 s|_{D_i}^{-1} (D(0, \epsilon_i) \cap D_i \subset \overline{D(P_i, r_i/2)}),$$

con $r_i < \delta_i/2$. Consideriamo $\omega_i \in \Omega_c^n(D(0, \epsilon_i))$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_i = 1$. Allora $p_2^* \omega_i$ è una n -forma su $E|_{D_i}$ a supporto compatto nella direzione verticale (perché $p_2|_{\xi_x} = \varphi_{\alpha_i, x}$ è un diffeomorfismo e quindi è un'applicazione propria) tale che, se indichiamo con $(p_2^* \omega_i)_x$ la restrizione di $p_2^* \omega_i$ alla fibra ξ_x , per ogni $x \in D_i$, vale

$$\int_{\xi_x} (p_2^* \omega_i)_x = \int_{\xi_x} (\varphi_{\alpha_i, x})^* \omega_i = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_i = 1,$$

(perché, per come abbiamo fissato l'orientazione su E , i diffeomorfismi $\varphi_{\alpha, x}$ hanno determinante jacobiano positivo) quindi per la proposizione 4.1.2 si ha che $p_2^* \omega_i$ è un rappresentante della classe di Thom del fibrato banale $\xi|_{D_i}$. D'altra parte sia $\Phi \in \Omega_c^n(E)$ un rappresentante della classe di Thom di ξ , scelto in modo tale che

$$\text{supp } s^* \Phi \subset \cup_{i=1}^k D(P_i, r_i)$$

(vedi proposizione 4.3.2). Chiaramente se poniamo $\Phi|_{E|_{D_i}} = \Phi_i$ è un rappresentante della classe di Thom di $\xi|_{D_i}$ e quindi

$$[\Phi_i] = [p_2^* \omega_i],$$

cioè

$$p_2^* \omega_i = \Phi_i + d\eta_i,$$

dove $d\eta_i$ è una forma su $E|_{D_i}$ a supporto compatto nella direzione verticale e vale

$$\text{supp } s^* d\eta_i = \text{supp } d(s^* \eta_i) \subset \text{supp } s^* p_2^* \omega_i \subset D(P_i, r_i)$$

(perché $\text{supp } s^* \Phi_i \subset D(P_i, r_i)$). Quindi per il teorema di Stokes, si ha

$$\int_{D_i} s^* d\eta_i = 0.$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k \text{molteplicità di zero di } s \text{ in } P_i &= \sum_{i=1}^k \deg_{P_i} p_2 s \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{D_i} s^* p_2^* \omega_i \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{D_i} s^* (\Phi_i + d\eta_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{D_i} s^* (\Phi_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{D_i} s^* (\Phi) \\
&= \int_B e(\xi).
\end{aligned}$$

Quindi la classe di Eulero di ξ è una n forma su B a supporto compatto contenuto nell'unione di opportuni intorno D_i dei punti P_i e il cui integrale su D_i è la molteplicità di zero di s in P_i e questo, ricordando come è fatto il duale di Poincaré di un punto in una varietà compatta (vedi esempio 4.2.1), conclude la dimostrazione. \square

Corollario 4.3.1 *Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato, di rango n , sia B compatto, orientato e di dimensione n . Allora se ξ ammette una sezione mai nulla la classe di Eulero di ξ è zero.*

Teorema 4.3.3 *Sia M è una varietà C^∞ orientata e compatta. Allora il numero di Eulero di M e la caratteristica di Eulero di M (vedi definizione 3.2.2) coincidono.*

Premettiamo alla dimostrazione del teorema i seguenti lemma.

Lemma 4.3.2 *Sia M una varietà C^∞ , orientata, compatta e di dimensione n . Sia $\{\omega_i\}$ una base dello spazio vettoriale $H^\bullet(M)$ (che ha dimensione finita essendo M compatto e quindi di tipo finito) e sia $\{\tau_i\}$ la base duale attraverso la dualità di Poincaré, cioè*

$$\int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{ij}.$$

Siano π e ρ le due proiezioni di $M \times M$ in M ,

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\rho} & M \\ \pi \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Allora il duale di Poincaré η_Δ della diagonale Δ in $M \times M$ è

$$\eta_\Delta = \sum (-1)^{\deg \omega_i} \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_i.$$

Dimostrazione. Per la formula di Künneth, vedi teorema 3.2.2, si ha che $H^\bullet(M \times M) = H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(M)$ e che una base di $H^\bullet(M \times M)$ è data da $\{\pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_j\}$. Quindi essendo η_Δ una forma in $H^\bullet(M \times M)$ si scriverà come

$$\eta_\Delta = \sum_{i,j} c_{ij} \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_j.$$

Consideriamo la mappa diagonale

$$d : M \rightarrow \Delta \subset M \times M$$

definita da

$$d(x) = (x, x),$$

allora si ha

$$\begin{aligned} \int_\Delta \pi^* \tau_k \wedge \rho^* \omega_l &= \int_M d^* \pi^* \tau_k \wedge d^* \rho^* \omega_l \\ &= \int_M \tau_k \wedge \omega_l \\ &= (-1)^{(\deg \tau_k \deg \omega_l)} \delta_{lk}. \end{aligned}$$

D'altra parte, per la definizione di duale di Poincaré (vedi formula (3.2.2)), si ha

$$\begin{aligned} \int_\Delta \pi^* \tau_k \wedge \rho^* \omega_l &= \int_{M \times M} \pi^* \tau_k \wedge \rho^* \omega_l \wedge \eta_\Delta \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} \int_{M \times M} \pi^* \tau_k \wedge \rho^* \omega_l \wedge \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_j \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} (-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l)(\deg \omega_i)} \int_{M \times M} \pi^* (\omega_i \wedge \tau_k) \rho^* (\omega_l \wedge \tau_j) \\ &= (-1)^{(\deg \tau_k + \deg \omega_l)(\deg \omega_k)} c_{kl}. \end{aligned}$$

Quindi

$$c_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq l \\ (-1)^{\deg \omega_k} & \text{se } k = l. \quad \square \end{cases}$$

Lemma 4.3.3 *Sia M una varietà C^∞ e sia $\Delta \subset M \times M$ la diagonale. Allora il fibrato normale N_Δ e il fibrato tangente T_Δ alla diagonale sono isomorfi.*

Dimostrazione. Poiché la mappa diagonale $d : M \rightarrow \Delta \subset M \times M$ manda diffeomorficamente M in Δ , si ha che $d^*T_\Delta = TM$. Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_\Delta & \longrightarrow & T(M \times M) & \longrightarrow & N_\Delta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & TM \oplus TM & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

segue che $N_\Delta \cong TM \cong T_\Delta$. \square

Dimostrazione del teorema 4.3.3. Ricordando che il duale di Poincaré di una sottovarietà chiusa S può essere rappresentato dalla stessa forma che rappresenta la classe di Thom di un intorno tubolare di S , si ha

$$\begin{aligned} \int_\Delta \eta_\Delta &= \int_\Delta \Phi(N_\Delta) \\ &\text{(dove } \Phi(N_\Delta) \text{ è la classe di Thom del fibrato normale a } \Delta \\ &\text{visto come un intorno tubolare di } \Delta \text{ in } M \times M) \\ &= \int_\Delta e(N_\Delta) \\ &\text{(poiché la classe di Thom ristretta alla sezione zero} \\ &\text{è la classe di Eulero)} \\ &= \int_\Delta e(T_\Delta) \\ &= \int_M e(TM). \end{aligned}$$

D'altra parte, per quanto dimostrato nel lemma 4.3 si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} \eta_{\Delta} &= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_{\Delta} \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_i \\
&= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M d^* \pi^* \omega_i \wedge d^* \rho^* \tau_i \\
&= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M \omega_i \wedge \tau_i \\
&= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \\
&= \sum_q (-1)^q \dim H^q(M) \\
&= \chi(M),
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Definizione 4.3.8 *Sia M una varietà \mathcal{C}^{∞} e sia V un campo di vettori su M , allora V può essere visto (vedi esempio 1.3.2) come una sezione del fibrato tangente. Sia $P \in M$ uno zero isolato di V allora definiamo l'indice di V su P come il grado locale di V in P .*

Teorema 4.3.4 (Teorema dell'indice di Hopf) *Sia M una varietà \mathcal{C}^{∞} orientata e compatta e sia V un campo di vettori su M con zeri isolati. Allora la somma degli indici di V è la caratteristica di Eulero di M .*

Dimostrazione. Per il teorema 4.3.2 la somma degli indici di un campo di vettori su M è il numero di Eulero di M , ma quest'ultimo per la proposizione 4.3.3 è la caratteristica di Eulero di M . \square

Proposizione 4.3.6 *Sia $f : B' \rightarrow B$ un'applicazione \mathcal{C}^{∞} tra varietà orientate e compatte. Sia $\xi = (E, \pi, B)$ un fibrato vettoriale orientato di rango k su B . Sia $f^* \xi$ il pull-back di ξ (vedi esempio 1.1.3) allora*

$$e(f^* \xi) = H^k f^* e(\xi).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $f^* \xi$ è un fibrato vettoriale di rango k su B' il cui spazio totale E' è l'unione disgiunta di $\xi_{f(x)}$ con $x \in B'$. Inoltre

l'identità $\xi_{f(x)} \rightarrow \xi_{f(x)}$ definisce un'applicazione di fibrati $F : f^*\xi \rightarrow \xi$ che induce f sulle basi, cioè il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{F} & E \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Sia $\Phi(\xi)$ un rappresentante della classe di Thom di ξ , allora $F^*\Phi$ è una n -forma su E tale che

$$(F^*\Phi) |_{(f^*\xi)_x} = (F^*\Phi) |_{\xi_x} = \Phi |_{f(x)},$$

quindi $F^*\Phi$ per la proposizione 4.1.2 è un rappresentante della classe di Thom di $f^*\xi$. Inoltre è chiaro che anche il diagramma

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f} & B \\ s'_0 \downarrow & & \downarrow s_0 \\ E' & \xrightarrow{F} & E. \end{array}$$

commuta (dove s_0 e s'_0 sono le sezioni nulle associate a, rispettivamente, ξ e $f^*\xi$), quindi, se indichiamo con $e(\xi)$ e $e(f^*\xi)$ i rappresentanti delle classi di Eulero di, rispettivamente, ξ e $f^*\xi$, si ha

$$\begin{aligned} e(f^*\xi) &= s'_0{}^*(F^*\Phi) \\ &= f^*s_0^*\Phi \\ &= f^*e(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Esempio 4.3.1 Ricordiamo che il fibrato tautologico su $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, vedi esempio 1.1.6, è il fibrato vettoriale complesso $\tau^1 = (E, \pi, \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ di rango 1 dove

$$E = \{(x, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \mid x \in l\}$$

e

$$\pi : E \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

è la proiezione sul secondo fattore. Inoltre se $\{U_0, U_1\}$ è il solito ricoprimento aperto di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, allora una rappresentazione coordinata per τ^1 è $\{U_i, \psi_i\}$ con $i = 0, 1$, dove

$$\psi_0 : U_0 \times \mathbb{C} \rightarrow E |_{U_0}$$

è definita da

$$\psi_0([1, u], t) = ((t, tu), [1, u]),$$

e

$$\psi_1 : U_1 \times \mathbb{C} \rightarrow E|_{U_1}$$

è definita da

$$\psi_1([u, 1], t) = ((tu, t), [u, 1]).$$

Vogliamo calcolare la classe di Eulero di τ^1 considerato come un fibrato vettoriale reale di rango 2, dove sul fibrato reale consideriamo l'orientazione indotta in modo naturale dal fibrato complesso (vedi osservazione 1.4.5). Sia

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

un'applicazione \mathcal{C}^∞ tale che

$$\varphi(z) = \frac{1}{\|z\|^2} \text{ se } \|z\| \geq 1$$

e

$$\varphi(z) \neq 0 \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Consideriamo l'applicazione \mathcal{C}^∞

$$s : U_0 \rightarrow E$$

definita da

$$[1, z] \mapsto ((\varphi(z), \varphi(z)z), [1, z]).$$

Ricordiamo che il cambiamento di coordinate da U_0 a U_1 è dato da

$$[1, z] \mapsto [1/z, 1].$$

Questa sezione si estende in modo \mathcal{C}^∞ a tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{[0, 1]\}$, infatti, sull'aperto U_1 si ha

$$s([w, 1]) = ((\varphi\left(\frac{1}{w}\right), \varphi\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w}), [w, 1]),$$

che è \mathcal{C}^∞ per $w \neq 0$. Estendiamo l'applicazione a tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ponendo

$$s([0, 1]) = ((0, 0), [0, 1]).$$

Questa estensione è \mathcal{C}^∞ perché se consideriamo $[w, 1]$ tale che $\|w\| \leq 1$ allora $\|\frac{1}{w}\| \geq 1$, quindi $\varphi(\frac{1}{w}) = \|w\|^2$, quindi si ha

$$s([w, 1]) = (\|w\|^2, \frac{\|w\|^2}{w}), [w, 1] = (\|w\|^2, \bar{w}), [w, 1].$$

Quindi s così definita è una sezione su \mathbb{CP}^1 che si annulla solo su $[0, 1]$. Perciò, considerando τ^1 come un fibrato reale, tramite l'identificazione di \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 data da

$$z = x + iy \mapsto (x, y),$$

s è una sezione di τ^1 che si annulla solo nel punto $P_0 = [(0, 0), 1]$. Poiché \mathbb{CP}^1 è compatto (è diffeomorfo a S^2) e orientabile e anche τ^1 lo è ($\{U_i, \psi_i\}$ è una rappresentazione coordinata orientata), per sapere come è fatta la classe di Eulero di τ^1 è sufficiente calcolare la molteplicità di zero di s in P_0 , cioè il grado locale di p_2s in P_0 dove p_2 è la proiezione locale di $E|_{U_1} \cong U_1 \times \mathbb{R}^2$ su \mathbb{R}^2 . Come intorno di P_0 scegliamo

$$U = \{[z, 1] \in U_1 \mid \|z\| < 1\},$$

allora p_2s su U si scrive in coordinate locali come

$$p_2s([(x, y), 1]) = p_2((x^2 + y^2, (x, -y)), [(x, y), 1]) = (x, -y)$$

cioè letta attraverso le carte su \mathbb{CP}^1

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

Sia $P \in U$ tale che $P \neq 0$ allora

$$J_P p_2s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

perciò $\det J_P p_2s = -1$ e quindi il grado di p_2s in P_0 è -1 . In conclusione la classe di Eulero di τ_1 è una 2-forma differenziale su \mathbb{CP}^1 a supporto compatto in un intorno di $[0, 1]$ e tale che

$$\int_{\mathbb{CP}^1} e(\tau^1) = -1.$$

Ora vorremmo calcolare la classe di Eulero per τ^n il fibrato tautologico su \mathbb{CP}^n . Per farlo consideriamo l'immersione

$$i_n : \mathbb{CP}^{n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$$

definita da

$$[x_1, \dots, x_n] \mapsto [0, x_1, \dots, x_n],$$

vogliamo dimostrare che $i_n^* \tau^n \cong \tau^{n-1}$. Vediamo come è fatto $i_n^* \tau^n$. Fissato $l \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ la fibra su x è $\tau_{i_n(l)}^n$ cioè, se $l = [l_1, \dots, l_n]$,

$$(i_n^* \tau^n)_l = \{((x_0, x_1, \dots, x_n), [0, l_1, \dots, l_n]) = (x', l') \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid x' \in l'\},$$

è chiaro che perché sia verificata la condizione $x' \in l'$ deve valere $x_0 = 0$. D'altra parte si ha

$$\tau_l^{n-1} = \{((x_1, \dots, x_n), [l_1, \dots, l_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \mid x \in l\}.$$

Sia E lo spazio totale di τ^{n-1} e sia E' lo spazio totale di $i_n^* \tau^n$, definiamo l'applicazione

$$j : E \rightarrow E'$$

come

$$j((x_1, \dots, x_n), [l_1, \dots, l_n]) = ((0, x_1, \dots, x_n), [0, l_1, \dots, l_n]).$$

Innanzitutto j è ben definita perché, indicando $j(x, l)$ con $((0, x), [0, l])$, si ha che se $x \in l$ allora $(0, x) \in [0, l]$, inoltre j è un diffeomorfismo. Vediamo come si comporta sulle fibre: fissiamo $l \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ e supponiamo che $l \in U_i^{n-1}$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, cioè $l = [l_1, \dots, 1, \dots, l_n]$, dove l'1 è all' i -esimo posto, allora un punto (x, l) nella fibra di l è individuato da $x_i \in \mathbb{C}$; consideriamo ora $j(x, l)$, si ha che $[0, l] \in U_i^n$ e $j(x, l)$ è ancora individuato da $x_i \in \mathbb{C}$. In altre parole j è un isomorfismo di fibrati che induce l'identità sulle fibre. Ora consideriamo l'immersione

$$i_{n-1} : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$$

definita da

$$[x_1, \dots, x_{n-1}] \mapsto [0, x_1, \dots, x_n],$$

si ha ancora che $i_{n-1}^* \tau^{n-1} \cong \tau^{n-2}$, quindi in un numero finito di passi successivi si ottiene che

$$i^* \tau^n \cong \tau^1,$$

dove abbiamo posto $i = i_2 i_3 \cdots i_n$. Quindi per la proposizione 4.3.6

$$H^2 i^* e(\tau^n) = e(i^* \tau^n) = e(\tau^1).$$

Ma avevamo visto nell'esempio 2.3.5 che i_n per ogni n induceva un'isomorfismo in coomologia tra $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ e $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1})$, quindi anche i induce un'isomorfismo in coomologia tra $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ e $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$, da cui

$$e(\tau^n) = e(\tau^1).$$

Definizione 4.3.9 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ , compatta e orientata e sia $f : M \rightarrow M$ una funzione \mathcal{C}^∞ . Allora f induce applicazioni

$$H^i f^* : H^i(M) \rightarrow H^i(M).$$

Il numero di Lefschetz di f è

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \operatorname{tr} H^i f^*,$$

dove $\operatorname{tr} H^i f^*$ indica la traccia dell'applicazione lineare $H^i f^*$.

Esempio 4.3.2 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ , compatta e orientata allora

$$L(id_M) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \operatorname{tr} id_{H^i(M)} = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \dim H^i(M) = \chi(M),$$

cioè il numero di Lefschetz dell'identità su M è la caratteristica di Eulero di M .

Definizione 4.3.10 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ e sia $f : M \rightarrow M$. Dato $P \in M$ si dice che P è un punto fisso per f se $f(P) = P$.

Definizione 4.3.11 Sia M una varietà \mathcal{C}^∞ , orientata e di dimensione n . Sia $f : M \rightarrow M$ un'applicazione \mathcal{C}^∞ e sia P in M un punto fisso isolato per f . Definiamo il grado locale di f in P come

$$\deg_P f = \deg_P(\phi f - \phi),$$

dove

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è una carta orientata su M .

Teorema 4.3.5 (Teorema di Lefschetz) *Sia M una varietà C^∞ , compatta e orientata e sia $f : M \rightarrow M$ una funzione C^∞ che ha punti fissi isolati $\{P_1, \dots, P_q\}$. Si ha*

$$L(f) = \sum_{i=1}^q \deg_{P_i} f.$$

Dimostrazione. Sia n la dimensione di M e sia $\Delta \subset M \times M$ la diagonale in $M \times M$. Consideriamo

$$F : M \rightarrow M \times M$$

definita da

$$F(x) = (f(x), x),$$

allora $F^{-1}(\Delta) = \{P_1, \dots, P_q\}$. Sia $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ un atlante orientato per M . Per ogni punto fisso P_i consideriamo un intorno aperto V_i di P_i tale che V_i è contenuto in una carta U_{α_i} e

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j.$$

Per la continuità di f esiste W_i aperto tale che $P_i \in W_i \subset V_i$ e $f(W_i) \subset V_i$. Se indichiamo con η_Δ un rappresentante per il duale di Poincaré della diagonale in $M \times M$, possiamo sceglierlo in modo che il suo supporto sia contenuto in un arbitrario intorno tubolare U della diagonale, vedi proposizione 4.2.3 e proposizione 4.3.2; quindi, eventualmente restringendo V_i e di conseguenza W_i , possiamo supporre che (analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della proposizione 4.3.2)

$$\text{supp}(\eta_\Delta |_{M \times W_i}) \subset V_i \times W_i \subset U \tag{4.3.1}$$

e

$$\int_M F^* \eta_\Delta = \sum_{i=1}^q \int_{W_i} F^* \eta_\Delta.$$

Consideriamo il diffeomorfismo

$$\varphi_i : V_i \times W_i \rightarrow \mathbb{R}^n \times W_i$$

definito da

$$(v, w) \mapsto (\psi_{\alpha_i}(v) - \psi_{\alpha_i}(w), w),$$

si vede facilmente che φ_i dà a $V_i \times W_i$ una struttura di intorno tubolare di $\Delta \cap (M \times W_i)$ e

$$\begin{aligned} \varphi_i F|_{W_i}: W_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \times W_i \\ w &\mapsto (\psi_{\alpha_i}(f(w)) - \psi_{\alpha_i}(w), w) \end{aligned}$$

è una sezione del fibrato banale i cui zeri sono i punti fissi di f ristretta a W_i cioè $\varphi_i F|_{W_i}$ ha un unico zero che è P_i . Quindi per il teorema 4.3.2 se indichiamo con Φ_i un rappresentante della classe di Thom del fibrato banale

$$\int_{W_i} (\varphi_i F|_{W_i})^* \Phi_i = \deg_{P_i}(p\varphi_i F|_{W_i}),$$

dove p

$$\mathbb{R}^n \times W_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è la proiezione sul primo fattore, quindi

$$p\varphi_i F|_{W_i}: W_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è definita da

$$w \mapsto (\psi_{\alpha_i}(f(w)) - \psi_{\alpha_i}(w)),$$

cioè

$$p\varphi_i F|_{W_i} = \psi_{\alpha_i} f - \psi_{\alpha_i},$$

da cui, per definizione,

$$\deg_{P_i}(p\varphi_i F|_{W_i}) = \deg_{P_i} f.$$

Fissato $\{P\} \in M$, si ha che Δ e $M \times \{P\}$ si intersecano trasversalmente quindi per la proposizione 4.2.4 si ha che

$$\begin{aligned} \int_M \eta_\Delta|_{M \times \{P\}} &= \int_{M \times M} \eta_\Delta \wedge \eta_{M \times \{P\}} \\ &= \int_{M \times M} \eta_{\{P\} \times \{P\}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'esempio 4.2.1. Se poniamo, per semplicità $\eta_i = \eta_\Delta|_{M \times W_i}$, per ogni fissato $Q \in W_i$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_i^{-1})^* \eta_i|_{\mathbb{R}^n \times \{Q\}} &= \int_{V_i} \eta_i|_{V_i \times \{Q\}} \\ &= \int_M \eta_\Delta|_{M \times \{P\}} \quad \text{per la formula (4.3.1)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

quindi $(\varphi_i^{-1})^*\eta_i$ è un generatore della classe di Thom Φ_i del fibrato banale $\mathbb{R}^n \times W_i$. In conclusione

$$\begin{aligned}
\int_M F^*\eta_\Delta &= \sum_{i=1}^q \int_{W_i} F^*\eta_\Delta \\
&= \sum_{i=1}^q \int_{W_i} F^*(\eta_\Delta |_{M \times W_i}) \\
&= \sum_{i=1}^q \int_{W_i} F^*\eta_i \\
&= \sum_{i=1}^q \int_{W_i} F^*\varphi_i^*\Phi_i \\
&= \sum_{i=1}^q \deg_{P_i}(p\varphi_i F |_{W_i}) \\
&= \sum_{i=1}^q \deg_{P_i} f.
\end{aligned}$$

D'altra parte sia $\{\omega_i\}$ una base dello spazio vettoriale $H^\bullet(M)$ (che ha dimensione finita essendo M compatto e quindi di tipo finito), sia $\{\tau_i\}$ la base duale attraverso la dualità di Poincaré, cioè

$$\int_M \omega_i \wedge \tau_j = \delta_{ij}$$

e siano π e ρ le due proiezioni di $M \times M$ in M , allora abbiamo visto che (vedi dimostrazione del lemma 4.3.2) il duale di Poincaré di Δ in $M \times M$ si scrive come $\eta_\Delta = \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_i$. Se identifichiamo l'applicazione $H^i f^*$ con la matrice che la rappresenta nella base $\{\omega_j \mid \deg \omega_j = i\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_M F^*\eta_\Delta &= \int_M HF^*\eta_\Delta \\
&= \int_M (HF^*(\sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_i)) \\
&= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M (HF^*(\pi^* \omega_i \wedge \rho^* \tau_i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i (-1)^{\deg \omega_i} \int_M (H f^* \omega_i \wedge \tau_i) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j: \deg \omega_j = i} \int_M (H^i f^* \omega_j \wedge \tau_j) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j: \deg \omega_j = i} (H^i f^*)_{jj} \int_M (\omega_j \wedge \tau_j) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j: \deg \omega_j = i} (H^i f^*)_{jj} \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \operatorname{tr} H^i f^* \\
&= L(f),
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. \square

Corollario 4.3.2 *Sia M una varietà C^∞ , compatta e orientata e sia $f : M \rightarrow M$ una funzione C^∞ . Allora se f non ha punti fissi $L(f) = 0$.*

Esempio 4.3.3 Sia $f : S^n \rightarrow S^n$ un'applicazione C^∞ allora

$$L(f) = 1 + (-1)^n \deg f.$$

Infatti poiché gli unici gruppi di coomologia di S^n diversi da zero sono quelli in grado zero e in grado n si ha

$$L(f) = \operatorname{tr} H^0 f^* + \operatorname{tr} H^n f^*.$$

Si ha che

$$H^0 f^* : H^0(S^n) \rightarrow H^0(S^n)$$

è definita da

$$c \mapsto cf$$

dove c è l'applicazione che associa ad ogni punto di S^n la costante c in \mathbb{R} , quindi $\operatorname{tr} H^0 f^* = 1$. Essendo S^n compatto, $H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$ e l'isomorfismo è dato da

$$\omega \mapsto \int_{S^n} \omega.$$

Sia ora $\omega \in H^n(S^n)$ tale che

$$\int_{S^n} \omega = 1.$$

Allora si ha che

$$\text{tr } H^n(f) = \int_{S^n} f^* \omega = \text{deg } f.$$

Quindi se $\text{deg } f \neq (-1)^n$, l'applicazione f ha almeno un punto fisso.

Esempio 4.3.4 Sia $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ un'applicazione \mathcal{C}^∞ . Abbiamo visto che se t è un generatore di $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, si ha che $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ è generato da t^k e $H^{2k+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$. Quindi se

$$(H^2 f^*)t = \alpha t$$

si ha

$$(H^{2k} f^*)t^k = \alpha^k t^k,$$

($H f^*$ è un omomorfismo di algebre). In conclusione si ha

$$L(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} \alpha^k = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ n & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Quindi $L(f) = 0$ se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha^{n+1} = 1$. In particolare se n è pari $L(f)$ è sempre diverso da zero.

Corollario 4.3.3 Sia $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ una funzione \mathcal{C}^∞ . Allora se n è pari f ha almeno un punto fisso.

Bibliografia

- [Br] Bredon G. E.
Topology and Geometry
Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [B-T] Bott R. e Tu L. W.
Differential Forms in Algebraic Topology
Springer-Verlag, New-York, 1982.
- [DR] De Rham G.
Variétés Différentiables
Hermann, Paris, 1960.
- [G-P] Guillemin V. e Pollack A.
Differential Topology
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [Gr] Greub W., Halperin S. e Vanstone R.
Connections, Curvature and Coomology vol.1
Academic Press, New York, 1972.
- [Gr2] Greub W., Halperin S. e Vanstone R.
Connections, Curvature and Coomology vol.2
Academic Press, New York, 1973.

- [Hu] Husemoller D.
Fiber Bundles seconda edizione
Springer-Verlag, New York, 1975.
- [M-S] Milnor J. e Stasheff J. D.
Characteristic Classes
Princeton University Press, New York, 1974.
- [G-P] Edited by Pier J. P.
Development of Mathematics 1900-1950
Birkhäuser-Verlag, Basel, 1994.
- [Sa] Sard A.
The measure of the critical points of differentiable maps
Bull. Amer. Math. Soc. 48, 1942.
- [Sp] Spivak M.
Calculus on Manifolds
W. A. Benjamin Inc., New York, 1965.