APPLICAZIONI LINEARI: soluzioni

Corso di Geometria

1)

a) T è lineare. Ricordando la definizione di somma di matrici e prodotto di uno scalare per una matrice infatti si ha: $\forall A, B \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $T(A+B) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^1 = \mathbf{a}^1 + \mathbf{b}^1 = T(A) + T(B)$ e $T(\alpha A) = (\alpha \mathbf{A})^1 = \alpha \mathbf{a}^1 = \alpha T(A)$. .

b) T non è lineare. Ad esempio si osservi che $T\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{array}\right) \neq \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$.

c) T non è lineare. Ad esempio si osservi che se $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ è definita da $f(z) = z - 1$ allora $T(2f) \neq 2T(f)$, infatti $T(2f) = ((2f)(1+i))^2 = (2(1+i-1))^2 = -4$ mentre $2T(f) = 2(f(1+i))^2 = 2(1+i-1)^2 = -2$.

d) T non è lineare. Ad esempio se $v = (1,1,1)$ e $w = (0,0,1)$ allora $T(v+w) \neq T(v) + T(w)$ infatti $T(v+w) = T((1,1,1)+(0,0,1)) = T(1,1,2) = (7,1,2)$ mentre $T(v) + T(w) = T(1,1,1) + T(0,0,1) = (0,1,1) + (1,0,1) = (1,1,2)$.

e) T è lineare: $\forall p, q \in \mathbb{R}[t]$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $T(p+q) = t(p+q) = tp + tq = T(p) + T(q)$ per la proprietà distributiva del prodotto di polinomi rispetto alla somma di polinomi e $T(\alpha p) = t(\alpha p) = \alpha(tp) = \alpha T(p)$, per la proprietà commutativa del prodotto di polinomi.

2)

a) $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$; base di $\ker T$: $\emptyset$; base di Im T: $\{(1,2,1), (1,1,1), (1,1,0)\}$; $T^{-1}((1,1,1)) = \{(0,1,0)\}$.

b) $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 18 & 6 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; base di $\ker T$: $\emptyset$;
base di Im T: $\{(11,4,18,3,9),(3,1,6,2,1),(0,0,-4,0,4),(2,1,0,1,6)\}$;
$T^{-1}((0,0,0,1)) = \emptyset$.

c) $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$; base di $\ker T$: $\{(3,2,5)\}$; base di Im T: $\{(3,1),(-1,0)\}$; $T^{-1}((3,1)) = \{(2+3\alpha, 1+2\alpha, 3+5\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

d) $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; base di $\ker T$: $\{2-t^2\}$; base di Im T: $\{t, 1\}$;
$T^{-1}(2+t) = \{1 + 2\alpha + 2t - \alpha t^2\}$.

e) $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; base di $\ker T$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;
base di Im T: $\{(1,2,0,0),(0,0,1,1)\}$; $T^{-1}((1,0,0,0)) = \emptyset$.

3)

a) $\Phi_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\Phi_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\Phi_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 1 \\ 3i & 1+i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 13-2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

d) $\Phi_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

e) $\Phi_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$