Divisione di polinomi

Versione 1

LA DIVISIONE FRA POLINOMI A COEFFICIENTI NUMERICI

ESERCIZIO GUIDA

332 Eseguiamo la seguente divisione:

$(x^3 - 8) : (x - 2)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & 0 & 0 & -8 & x-2 \\ \cline{5-5} & & & & x^2 \end{array}$$

a. Mettiamo 0 nella posizione di x^2 e di x.
Dividiamo x^3 per x.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & 0 & 0 & -8 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-4} // & 2x^2 & 0 & -8 & \end{array}$$

b. Moltiplichiamo x^2 per $x - 2$, cambiamo segno, incolonniamo sotto il dividendo e sommiamo.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & 0 & 0 & -8 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x \\ \cline{1-4} // & 2x^2 & 0 & -8 & \\ & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4} & & 4x & -8 & \end{array}$$

c. Dividiamo $2x^2$ per x, moltiplichiamo il risultato $2x$ per $x - 2$, cambiamo segno, incolonniamo e sommiamo.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & 0 & 0 & -8 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & \underbrace{x^2+2x+4}_{Q(x)} \\ \cline{1-4} // & 2x^2 & 0 & -8 & \\ & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4} & & 4x & -8 & \\ & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4} & & & \underbrace{0}_{R} & \end{array}$$

d. Dividiamo $4x$ per x, moltiplichiamo il risultato 4 per $x - 2$, cambiamo segno e sommiamo.
Il resto è 0.

Versione 2

1

$$\begin{array}{lr|l|l} & 3x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 11x + 10 & 3x+2 & \\ \cline{3-3} & -3x^4 - 2x^3 & x^3 - 4x^2 + x + 3 & 3x^4 : (3x) = x^3 \\ \cline{2-2} 1^{\circ} \text{ resto parziale} & // \; -12x^3 - 5x^2 + 11x + 10 & & -12x^3 : (3x) = -4x^2 \\ & +12x^3 + 8x^2 & & \\ \cline{2-2} 2^{\circ} \text{ resto parziale} & // \; +3x^2 + 11x + 10 & & +3x^2 : (3x) = x \\ & -3x^2 - 2x & & \\ \cline{2-2} 3^{\circ} \text{ resto parziale} & // \; 9x + 10 & & 9x : (3x) = 3 \\ & -9x - 6 & & \\ \cline{2-2} \text{resto} & // \; +4 & & \end{array}$$

Qui l'operazione ha termine perché il resto $(+4)$ è di grado zero e quindi di grado inferiore al grado del divisore che era di primo grado.
Si ottiene così il quoziente $x^3 - 4x^2 + x + 3$ e il resto $+4$.
Si potrebbe verificare l'esattezza dell'operazione constatando che il prodotto del quoziente per il divisore aumentato del resto dà il dividendo, cioè

$$(x^3 - 4x^2 + x + 3)(3x + 2) + 4 = 3x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 11x + 10.$$

Esercizi facili

5 $(4x^3+x+1):(2x+3)$. $[Q=2x^2-3x+5;\ R=-14]$

6 $(2x^3+x+1):(2x-1)$. $\left[Q=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4};\ R=\frac{7}{4}\right]$

7 $(6x^3-2x^2+3x-1):(2x^2+1)$. $[Q=3x-1;\ R=0]$

8 $(2x^3+3x^2-5x-4):(x^2-x-1)$. $[Q=2x+5;\ R=2x+1]$

9 $(3x^3+4x^2-4x-7):(3x-2)$. $[Q=x^2+2x;\ R=-7]$

10 $(4a^3+4a^2-19a+6):(2a^2+5a-2)$. $[Q=2a-3;\ R=0]$

11 $(6x^3+12x^2-x-1):(3x^2-1)$. $[Q=2x+4;\ R=x+3]$

12 $(-4x^3+10x^2-10x+3):(2x^2-4x+3)$. $[Q=-2x+1;\ R=0]$

Esercizi difficili

21 $(3x^3+x^2-5x+2):(3x+2)$. $\left[Q=x^2-\frac{1}{3}x-\frac{13}{9};\ R=\frac{44}{9}\right]$

22 $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{9}{2}\right):\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)$. $[Q=x-3;\ R=0]$

23 $\left(x^4-\frac{19}{6}x^3+\frac{1}{6}x^2+4x-2\right):(3x^2-5x+2)$. $\left[Q=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-1;\ R=0\right]$

24 $\left(\frac{1}{16}x^8-4x^4-2x^2-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{1}{2}\right)$. $\left[Q=\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{1}{2};\ R=0\right]$

Eseguire le seguenti divisioni dopo aver ordinato i due polinomi secondo le potenze decrescenti di una qualsiasi delle lettere che in essi figurano:

29 $(2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4):(2a^2-3ab+4b^2)$. $[a^2-5ab+6b^2]$

30 $(a^2+3x^2+4ax):(a+x)$; $(2x^2-3ax+a^2):(a-2x)$. $[a+3x;\ a-x]$

31 $(6x^4+ax^2-15a^2):(5a+3x^2)$; $(b^3-4ab^2+5a^2b-2a^3):(a-b)^2$ $[2x^2-3a;\ b-2a]$

Essendo $m\in N$, $n\in N$, eseguire le seguenti divisioni:

32 $(x^{3m}-y^{3n}):(x^m-y^n)$; $(a^{3m}-b^{3n}):(a^{2m}+a^mb^n+b^{2n})$. $[x^{2m}+x^my^n+y^{2n};\ a^m-b^n]$

33 $(a^{4m}+2a^{3m}+a^{2m}):(a^m+1)$; $(x^{4m}-16^n):(x^m-2^n)$.
$[a^{3m}+a^{2m};\ x^{3m}+2^nx^{2m}+4^nx^m+8^n]$

Teorema del resto (o della divisibilità per (x-c))

Il resto della divisione di un polinomio A(x) per il binomio (x-c) è uguale al valore che il polinomio A(x) stesso assume quando all variabile x si sostituisce il numero c, cioè il termine noto del divisore cambiato di segno.

In particolare questo teorema è utile per individuare quale binomio di tipo (x-c) è in grado di dividere senza resto un dato polinomio A(x) cosicché quest'ultimo possa essere scomposto in fattori.

Si verifichi tale teorema osservando i risultati delle precedenti divisioni.