

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

Esercizi risolti e guidati



Esercizi risolti e guidati

Raccolimento a fattore comune

$$1 \quad \frac{7}{2}ax + \frac{7}{4}bx = \frac{7}{2}x\left(a + \frac{1}{2}b\right).$$

Fattore comune: $\frac{7}{2}x$

$$2 \quad -\frac{1}{2}a^3b - \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{1}{2}ab^3 = -\frac{1}{2}ab(a^2 + 3ab + b^2).$$

Fattore comune: $-\frac{1}{2}ab$.

$$3 \quad 5a^4b + 5a^2b^3 + 5ab^2 = 5ab(a^3 + ab^2 + b).$$

Fattore comune: $5ab$.

$$4 \quad 3x^2y^3 + \frac{3}{2}xy^4 + \frac{1}{2}xyz^2 = \frac{xy}{2} \cdot (6xy^2 + 3y^3 + z^2).$$

Fattore comune: $\frac{xy}{2}$

$$5 \quad 3x^3 + 3xy^2 + 2x^2y + 2y^3 + x^2z + y^2z = \\ = 3x(x^2 + y^2) + 2y(x^2 + y^2) + z(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) \cdot (3x + 2y + z).$$

Fattore comune: $3x, 2y, z;$
poi $(x^2 + y^2)$.

$$6 \quad 2a^2 + 3ab + ac + 2ab^2 + 3b^3 + b^2c + 2ac + 3bc + c^2 = \\ = a(2a + 3b + c) + b^2(2a + 3b + c) + c(2a + 3b + c) = \\ = (2a + 3b + c)(a + b^2 + c).$$

Fattore comune: $a, b^2, c;$
poi $(2a + 3b + c)$.

$$7 \quad \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}bz + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}az + \frac{5}{2}ay + \frac{5}{2}by = \\ = \frac{1}{2}(ax - bz + bx - az + 5ay + 5by) = \\ = \frac{1}{2}[x(a + b) - z(a + b) + 5y(a + b)] = \\ = \frac{1}{2}(a + b)(x - z + 5y).$$

Fattore comune: $\frac{1}{2};$
poi $x, -z, 5y,$ infine ...

$$8 \quad x^2 - xy + xz - x - xt + yt - zt + t = x(x - y) + x(z - 1) - t(x - y) - t(z - 1) = \\ = (x - y) \cdot (x - t) + (z - 1) \cdot (x - t) = (x - t)(x - y + z - 1).$$

Fattore comune: $x, t,$
poi ...

$$9 \quad a^{n+1} + ab^m + a^n b + b^{m+1} = a^n(a + b) + b^m(a + b) = \\ = (a + b)(a^n + b^m).$$

Fattore comune: a^n e $b^m,$
poi ...

$$10 \quad x^{n+2} - y^{m+2} - x^2y^m + x^ny^2 = x^n(x^2 + y^2) - y^m(x^2 + y^2) = \\ = (x^2 + y^2)(x^n - y^m).$$

Fattore comune: x^n e $-y^m,$
poi ...

$$11 \quad a(a - b) - (b - a)^2 = a(a - b) - (a - b)^2 = (a - b)(\cancel{a} - \cancel{a} - b) = \\ = b(a - b).$$

Fattore comune: $a - b,$

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

Esercizi risolti e guidati

Differenza di quadrati

$$\boxed{12} \quad \frac{1}{4}x^2 - a^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - (a)^2 = \left(\frac{1}{2}x + a\right)\left(\frac{1}{2}x - a\right).$$

$$\boxed{13} \quad \frac{1}{9}y^4 - 16 = \left(\frac{1}{3}y^2\right)^2 - (4)^2 = \left(\frac{1}{3}y^2 + 4\right)\left(\frac{1}{3}y^2 - 4\right).$$

$$\boxed{14} \quad 9z^8 - 25t^2 = (3z^4)^2 - (5t)^2 = (3z^4 + 5t)(3z^4 - 5t).$$

$$\boxed{15} \quad (a - b)^2 - (x - y)^2 = [(a - b) + (x - y)] \cdot [(a - b) - (x - y)] = (a - b + x - y) \cdot (a - b - x + y).$$

$$\boxed{16} \quad (x + y)^2 - (4)^2 = [(x + y) + 4] \cdot [(x + y) - 4] = (x + y + 4)(x + y - 4).$$

$$\boxed{17} \quad 2ax^4 - 2ax^2y^2 - 8ay^4 + 8axy^3 = 2a(x^4 - x^2y^2 - 4y^4 + 4xy^3) = 2a[(x^4 - x^2y^2) + (-4y^4 + 4xy^3)] = \\ = 2a[x^2(x^2 - y^2) + 4y^3(-y + x)] = 2a[x^2(x - y)(x + y) + 4y^3(x - y)] = 2a(x - y)(x^3 + x^2y + 4y^3).$$

Quadrato della somma (differenza) di due termini

$$\boxed{18} \quad 25m^2 + 20mn + 4n^2 = (5m)^2 + 2 \cdot (5m) \cdot (2n) + (2n)^2 = (5m + 2n)^2.$$

$$\boxed{19} \quad \frac{9}{4}x^4 + 12x^2y + 16y^2 = \left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}x^2\right) \cdot (4y) + (4y)^2 = \left(\frac{3}{2}x^2 + 4y\right)^2.$$

$$\boxed{20} \quad \frac{1}{9}x^4 + 1 - \frac{2}{3}x^2 = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{1}{3}x^2\right) \cdot 1 = \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)^2.$$

$$\boxed{21} \quad \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{3}xy = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}y\right) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^2.$$

$$\boxed{22} \quad x^{2m} - 2x^m y^n + y^{2n} = (x^m)^2 - 2(x^m)(y^n) + (y^n)^2 = (x^m - y^n)^2.$$

$$\boxed{23} \quad x^8 + y^8 - 2x^4 y^4 = (x^4)^2 - 2x^4 y^4 + (y^4)^2 = (x^4 - y^4)^2 = (x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2)^2 = \\ = (x - y)^2 (x + y)^2 (x^2 + y^2)^2.$$

$$\boxed{24} \quad 36a^5 y^7 + 4a^7 y^5 - 24a^6 y^6 = 4a^5 y^5 (9y^2 + a^2 - 6ay)^2 = 4a^5 y^5 (3y - a)^2.$$

$$\boxed{25} \quad a^5 y^2 + 6a^3 y + 9a = a(a^4 y^2 + 6a^2 y + 9) = a(a^2 y + 3)^2.$$

$$\boxed{26} \quad 2a^3 - 4a^2 + 2a = 2a(a^2 - 2a + 1) = 2a(a - 1)^2.$$

$$\boxed{27} \quad 125x^{2n} - 25x^n + \frac{5}{4} = 5\left(25x^{2n} - 5x^n + \frac{1}{4}\right) = 5\left(5x^n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Quadrati della somma di più termini

$$\boxed{28} \quad x^4 + y^2 + 1 + 2x^2 y - 2x^2 - 2y = (x^2)^2 + (y)^2 + (1)^2 + 2(x^2) \cdot y - 2x^2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot y = (x + y - 1)^2.$$

$$\boxed{29} \quad x^2 + 9y^2 + 4 - 6xy + 4x - 12y = (x)^2 + (-3y)^2 + (2)^2 + 2(x)(-3y) + 2(x) \cdot (2) + 2 \cdot (-3y) \cdot (2) = \\ = (x - 3y + 2)^2.$$

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

Esercizi risolti e guidati

$$\boxed{30} \quad a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 4a + 4b = (a)^2 + (b)^2 + (2)^2 + 2(a)(b) + 2(a)(2) + 2(b) \cdot (2) = (a + b + 2)^2.$$

Cubo della somma (differenza) di due termini

$$\boxed{31} \quad 8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2x + 3(2a)(x^2) + (x)^3 = (2a + x)^3.$$

$$\boxed{32} \quad a^6 - 9a^5b + 27a^4b^2 - 27a^3b^3 = (a^2)^3 + 3(a^2)^2 \cdot (-3ab) + 3(a^2)(-3ab)^2 + (-3ab)^3 = (a^2 - 3ab)^3 = [a(a - 3b)]^3 = a^3(a - 3b)^3.$$

$$\boxed{33} \quad x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = (x)^3 + 3(x)^2\left(-\frac{1}{3}\right) + 3(x)\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3.$$

$$\boxed{34} \quad (a - b)^3 - 3(a - b)^2c + 3(a - b)c^2 - c^3 = (a - b - c)^3.$$

$$\boxed{35} \quad \frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{64} + \frac{3x^2y}{16} + \frac{3xy^2}{32} = \frac{1}{8} \left(x^3 + \frac{y^3}{8} + \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 \right) = \frac{1}{8} \left(x + \frac{y}{2} \right)^3.$$

$$\boxed{36} \quad 3x^4y - 18x^3y^2 + 36x^2y^3 - 24xy^4 = 3xy(x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3) = 3xy(x - 2y)^3.$$

$$\boxed{37} \quad 8x^3y^3 - 36x^2y^3c + 54xy^3c^2 - 27y^3c^3 = y^3(8x^3 - 36x^2c + 54xc^2 - 27c^3) = y^3(2x - 3c)^3.$$

Somme e differenze di cubi

$$\boxed{38} \quad 64a^3b^6 - z^{12} = (4ab^2)^3 - (z^4)^3 = (4ab^2 - z^4)(16a^2b^4 + 4ab^2z^4 + z^8).$$

$$\boxed{39} \quad 125t^3 + k^9 = (5t)^3 + (k^3)^3 = (5t + k^3)(25t^2 - 5tk^3 + k^6).$$

$$\boxed{40} \quad a^9 + b^9 = (a^3)^3 + (b^3)^3 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6).$$

$$\begin{aligned} \boxed{41} \quad a^2 - b^2 - (b^6 - a^6) &= \\ &= a^2 - b^2 + (a^6 - b^6) = a^2 - b^2 + (a^3)^2 - (b^3)^2 = \\ &= (a - b)(a + b) + (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = \\ &= (a - b)(a + b) + (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\ &= (a - b)(a + b)[1 + (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2] = (a - b)(a + b)(1 + a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2) = \\ &= (a - b)(a + b)(a^4 + b^4 + a^2b^2 + 1). \end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + (a^2)^3 - (b^2)^3 &= (a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = (a^2 - b^2)(1 + a^4 + a^2b^2 + b^4) = \\ &= (a - b)(a + b)(a^4 + b^4 + a^2b^2 + 1). \end{aligned}$$

$$\boxed{42} \quad 2(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - 16z^3 = 2[(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - 8z^3] = \\ = 2[(x + y)^3 - (2z)^3] = 2(x + y - 2z)(x^2 + y^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 4z^2).$$

Trinomio notevole

$$\boxed{43} \quad \text{Scomporre il seguente trinomio: } x^2 - 7x + 12.$$

Cerchiamo una coppia di valori che abbiano prodotto $p = +12$ e somma $s = -7$. Abbiamo che:

$p = 12 \Rightarrow$ concordi; $s = -7 \Rightarrow$ concordi negativi.

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

Esercizi risolti e guidati

44 $x^4 - x^2 - 20$.

Si ha:

$p = -20 \Rightarrow$ discordi; $s = -1 \Rightarrow$ il maggiore è negativo.

$x_1 = -5; x_2 = +4 \Rightarrow x^4 - x^2 - 20 = (x^2 - 5)(x^2 + 4)$.

45 $5x^2 - 18x - 8$.

Cerchiamo una coppia di valori che abbiano prodotto $p = 5 \cdot (-8) = -40$ e somma $s = -18$. Si ha:

$p = -40 \Rightarrow$ discordi; $s = -18 \Rightarrow$ il maggiore è negativo.

$x_1 = -20; x_2 = 2 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 2x - 8 = 5x(x - 4) + 2(x - 4) = (5x + 2)(x - 4)$.

Uso del teorema e della regola di RUFFINI

Per poter applicare il teorema e la regola di RUFFINI, occorre ricordare quanto segue.

- Il polinomio $A(x)$ è divisibile per $(x - c)$ se $A(c) = 0$.
In questo caso, si dice che il numero c è uno **zero** del polinomio $A(x)$.
- Gli eventuali **zeri razionali** di un polinomio a coefficienti interi vanno cercati fra i numeri del tipo $\pm \frac{p}{q}$, dove p è un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.
- Dopo aver eseguito la divisione $A(x) : (x - c) = Q(x)$, si ha: $A(x) = (x - c) \cdot Q(x)$.

Applicando la regola di RUFFINI, fattorizzare i seguenti polinomi.

46 $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 6$.

Applichiamo il teorema del resto ai divisori interi del termine noto 6:

$P(1) = 1 + 2 - 7 - 2 + 6 = 0 \rightarrow$ divisibile per $(x - 1)$

$P(-1) = 1 - 2 - 7 + 2 + 6 = 0 \rightarrow$ divisibile per $(x + 1)$

$P(-2) = 16 - 16 - 28 + 4 + 6 \neq 0$

$P(2) = 16 + 16 - 28 - 4 + 6 \neq 0$

$P(3) = 81 + 54 - 63 - 6 + 6 \neq 0$

$P(-3) = 81 - 54 - 63 + 6 + 6 \neq 0$

	1	2	-7	-2	6
1		1	3	-4	-6
	1	3	-4	-6	0
-1		-1	-2	+6	
	1	2	-6	0	

$(x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 6)$

$(x + 1)(x - 1)(x^2 + 2x - 6)$

Fattorizzazione del polinomio dato

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

Esercizi proposti

Differenza dei quadrati di due termini

20. $256x^8 - 6.561.$ $[(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)(16x^4 + 81)]$
21. $x^6 - y^6.$ $[(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)]$
22. $1 - x^8.$ $[(1 + x^4)(1 + x^2)(1 + x)(1 - x)]$
23. $36x^6 - 25y^8.$ $[(6x^3 + 5y^4)(6x^3 - 5y^4)]$
24. $\frac{9}{25}a^4b^6 - 4.$ $\left[\left(\frac{3}{5}a^2b^3 - 2\right)\left(\frac{3}{5}a^2b^3 + 2\right)\right]$
25. $x^{2m+2} - y^{2m-2}.$ $[(x^{m+1} + y^{m-1})(x^{m+1} - y^{m-1})]$
26. $x^{2m} - y^{2n}.$ $[(x^m + y^n)(x^m - y^n)]$
27. $4x^6 - y^6.$ $[(2x^3 - y^3)(2x^3 + y^3)]$
28. $81a^4 - b^4.$ $[(9a^2 + b^2)(3a + b)(3a - b)]$
29. $16x^4 - y^4.$ $[(2x + y)(2x - y)(4x^2 + y^2)]$
30. $a^8 - 1.$ $[(a + 1)(a^2 + 1)(a - 1)(a^4 + 1)]$
31. $9x^5 - 144a^4x.$ $[9x(x^2 + 4a^2)(x + 2a)(x - 2a)]$
32. $(xy - 1)^2 - (x - y)^2.$ $[(x + 1)(x - 1)(y + 1)(y - 1)]$

Quadrato della somma (differenza) di due termini

33. $25x^2 + 16 - 40x.$ $[(5x - 4)^2]$
34. $\frac{9}{4}x^4 - 6x^3y^3 + 4x^2y^6.$ $\left[x^2\left(\frac{3}{2}x - 2y^3\right)^2\right]$
35. $x^{2m} - 2x^m y^n + y^{2n}.$ $[(x^m - y^n)^2]$
36. $x^2y^2 + a^2 - 2axy.$ $[(xy - a)^2]$
37. $9x^3 - 12x^2z + 4xz^2.$ $[x(3x - 2z)^2]$
38. $36a^5y^7 + 4a^7y^5 - 24a^6y^6.$ $[4a^5y^5(3y - a)^2]$
39. $a^5y^2 + 6a^3y + 9a.$ $[a(a^2y + 3)^2]$
40. $2a^3 - 4a^2 + 2a.$ $[2a(a - 1)^2]$
41. $\frac{16}{25}x^2y^2 - \frac{8}{15}xyz + \frac{1}{9}z^2.$ $\left[\left(\frac{4}{5}xy - \frac{1}{3}z\right)^2\right]$
42. $9x^3 - 12x^2y + 4xy^2.$ $[x(3x - 2y)^2]$
43. $x^{2n} - x^n + \frac{1}{4}.$ $\left[\left(x^n - \frac{1}{2}\right)^2\right]$

SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI

Esercizi proposti

Quadrato della somma di più termini

44. $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz.$ $[(3x + 2y - z)^2]$

45. $b^4 - 2b^3 + b^2 + 1 + 2b^2 - 2b.$ $[(b^2 - b + 1)^2]$

46. $4c^2 + b^2 + a^2 + 2ab - 4ac - 4bc.$ $[(a + b - 2c)^2]$

Cubo della somma (differenza) di due termini

47. $3x^4y - 18x^3y^2 + 36x^2y^3 - 24xy^4.$ $[3xy(x - 2y)^3]$

48. $8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3.$ $[(2a + 5b)^3]$

49. $a^{3n}x^{3(m+1)} - 9a^{2n}b^{2m}x^{2(m+1)} + 27a^n b^{4m}x^{m+1} - 27b^{6m}.$ $[(a^n x^{m+1} - 3b^{2m})^3]$

50. $\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{64} + \frac{3x^2y}{16} + \frac{3xy^2}{32}.$ $\left[\frac{1}{8}\left(x + \frac{y}{2}\right)^3\right]$

51. $\frac{8}{27}a^3 - 2a^2b + \frac{9}{2}ab^2 - \frac{27}{8}b^3.$ $\left[\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b\right)^3\right]$

Somme e differenze di cubi

52. $x^3 - y^3;$ $8a^3 - 27b^3.$ $[(x - y)(x^2 + xy + y^2); (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)]$

53. $125x^3 + y^3;$ $x^7 - 125x.$ $[(5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2); x(x^2 - 5)(x^4 + 5x^2 + 25)]$

54. $9a^2 - 72a^2b^3;$ $7x^5 - 7x^2b^3.$ $[9a^2(1 - 2b)(1 + 2b + 4b^2); 7x^2(x - b)(x^2 + xb + b^2)]$

55. $3y^5 - 81y^2;$ $x^3y - 27y.$ $[3y^2(y - 3)(y^2 + 3y + 9); y(x - 3)(x^2 + 3x + 9)]$

Trinomio notevole

56. $a^2 + 12a + 32.$ $[(a + 4)(a + 8)]$

57. $x^2 - 5x - 6.$ $[(x + 1)(x - 6)]$

58. $a^4 + 7a^2 + 12.$ $[(a^2 + 3)(a^2 + 4)]$

59. $x^2 - 5xy + 6y^2.$ $[(x - 3y)(x - 2y)]$

60. $x^2 - xy - 30y^2.$ $[(x - 6y)(x + 5y)]$

61. $x^2 + 8xy - 20y^2.$ $[(x + 10y)(x - 2y)]$

62. $x^2 - (a + 2)x + a + 1.$ $[(x - 1)(x - a - 1)]$

Regola di RUFFINI

63. $2a^4 - 5a^2 + 2a + 1.$ $[(a - 1)^2(2a^2 + 4a + 1)]$

64. $y^5 - 19y^4 + 114y^3 - 238y^2 + 205y - 63.$ $[(y - 1)^3(y - 7)(y - 9)]$

65. $2a^7 - 26a^6 + 68a^5 + 126a^4 - 98a^3.$ $[2a^3(a - 7)^2(a^2 + a - 1)]$