Soluzione degli esercizi sull'iperbole

Esercizio 1. *Determina le coordinate dei fuochi dell'iperbole* $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.
Soluzione. I vertici sono $(\pm 2, 0)$, i fuochi appartengono all'asse x e le loro coordinate sono $F_{1,2} = (\pm\sqrt{4+9}\,,\,0) = (\pm\sqrt{13}\,,\,0)$.

Esercizio 2. *Determina le coordinate dei fuochi dell'iperbole* $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = -1$.
Soluzione. I vertici sono $(0, \pm 3)$, i fuochi appartengono all'asse y e le loro coordinate sono $F_{1,2} = (0\,,\,\pm\sqrt{4+9}) = (0\,,\,\pm\sqrt{13})$.

Esercizio 3. *Determina le equazioni degli asintoti dell'iperbole* $4\,x^2 - 25\,y^2 = 6$.
Soluzione. Dividendo per 6 l'equazione canonica dell'iperbole è $\dfrac{x^2}{\frac{3}{2}} - \dfrac{y^2}{\frac{6}{25}} = 1$, pertanto risulta $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $b = \sqrt{\frac{6}{25}}$.

Gli asintoti hanno equazione generale $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$, quindi nel nostro caso risulta $y = \pm\dfrac{\sqrt{\frac{6}{25}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\,x$ ovvero $y = \pm\dfrac{2}{5}\,x$.

Esercizio 4. *Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti tali che il valore assoluto della differenza delle distanze dai punti* $(-2, 0)$ *e* $(2, 0)$ *sia uguale a* 2.
Soluzione. I fuochi appartengono all'asse x, pertanto l'equazione da utilizzare è $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Risulta $a = \dfrac{2}{2} = 1$, $c = 2$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, quindi l'equazione dell'iperbole è $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ ovvero $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Esercizio 5. *Determina l'equazione dell'iperbole passante per* $(4, -3)$ *avente i fuochi nei punti* $(0, 5)$ *e* $(0, -5)$.
Soluzione. Visto che i fuochi appartengono all'asse y, l'equazione da utilizzare è $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$. Il punto $(4, -3)$ ha distanza pari a $2\sqrt{5}$ dal fuoco $(0, -5)$ e distanza $4\sqrt{5}$ dall'altro fuoco; risulta $b = \dfrac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, $c = 5$, $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25-5} = \sqrt{20}$. L'equazione dell'iperbole è $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = -1$.

Esercizio 6. *Determina* a *e* b *in modo che l'iperbole* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *passi per i punti* $(1, 1)$ *e* $(3, 5)$.
Soluzione. Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 \\[2ex] \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{25}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \text{ponendo } \alpha = \frac{1}{a^2} \text{ e } \beta = \frac{1}{b^2} \text{ si ha } \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 9\,\alpha - 25\,\beta = 1 \end{cases}$$

risolvendo l'ultimo sistema si trova $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$; ricordando che $a^2 = \dfrac{1}{\alpha}$ e $b^2 = \dfrac{1}{\beta}$, la corrispondente equazione *canonica* dell'iperbole è $\dfrac{x^2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ oppure, più semplicemente, $3\,x^2 - y^2 = 2$.

Esercizio 7. *Determina l'equazione dell'iperbole avente vertici nei punti* $(\pm 2, 0)$ *e fuochi nei punti* $(\pm\sqrt{40}, 0)$.
Soluzione. L'equazione da utilizzare è $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; si ha $a = 2$, $c = \sqrt{40}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{40-4} = 6$. L'iperbole ha pertanto equazione $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

Esercizio 8. *Determina l'equazione dell'iperbole avente vertici nei punti* $(0, \pm 2)$ *e fuochi nei punti* $(0, \pm\sqrt{40})$.
Soluzione. L'equazione da utilizzare è $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$; si ha $b = 2$, $c = \sqrt{40}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 6$. L'iperbole ha pertanto equazione $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = -1$.

Esercizio 9. *Determina le coordinate dei punti di intersezione tra l'iperbole $x^2-2\,y^2=1$ e la retta $x-y=1$.*
Soluzione. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2-2\,y^2=1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

si trovano i punti $A(1,0)$ e $B(3,2)$.

Esercizio 10. *Determina le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto $P(1,1)$ all'iperbole $x^2-2\,y^2=1$. Determina inoltre le coordinate dei punti di tangenza.*
Soluzione. Scritta l'equazione della generica retta passante per $P(1,1)$, $y=m(x-1)+1$, basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} x^2-2\,y^2=1 \\ y=m(x-1)+1 \end{cases}$$

ammetta soluzioni coincidenti. Si arriva così all'equazione $3-4\,m=0$, da cui si ricava $m=\dfrac{3}{4}$; la corrispondente equazione della tangente è $y=\dfrac{3}{4}(x-1)+1$ (tangente in $T(-3,-2)$ all'iperbole). Si noti bene che oltre alla retta individuata esiste anche un'altra tangente: si tratta della retta di equazione $x-1=0$, parallela all'asse y, passante per P e tangente all'iperbole nel vertice $(1,0)$.

Esercizio 11. *Determina i valori di k per cui la retta $y=-\dfrac{1}{2}\,x+k$ è tangente all'iperbole $x^2-y^2=-1$. Determina inoltre le coordinate dei punti di tangenza tra le rette trovate e l'iperbole assegnata.*
Soluzione. Basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ y=-\dfrac{1}{2}\,x+k \end{cases}$$

ammetta soluzioni coincidenti. Si arriva così all'equazione $4\,k^2-3=0$, dalla quale si ricavano le soluzioni $k_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $k_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le corrispondenti rette tangenti hanno equazione $y=-\dfrac{1}{2}\,x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $y=-\dfrac{1}{2}\,x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; i rispettivi punti di tangenza sono $T_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e $T_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Esercizio 12. *Determina i valori di k per cui la retta $y=-2\,x+k$ è tangente all'iperbole $x^2-y^2=-1$.*
Soluzione. Basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ y=-2\,x+k \end{cases}$$

ammetta soluzioni coincidenti. Si arriva all'equazione $k^2+3=0$ che non ammette soluzioni reali. Non esistono pertanto rette della forma $y=-2\,x+k$ tangenti all'iperbole assegnata. Possiamo inoltre affermare che, per ogni $k\in\mathbb{R}$, la retta $y=-2\,x+k$ interseca l'iperbole $x^2-y^2=-1$ in due punti distinti aventi ascisse rispettivamente $x_1=\dfrac{2\,k-\sqrt{k^2+3}}{3}$ e $x_2=\dfrac{2\,k+\sqrt{k^2+3}}{3}$.

Esercizio 13. *Determina le coordinate dei punti A e B di intersezione dell'iperbole $2\,x^2-5\,y^2=-3$ con la retta $y=-x$. Determina inoltre le rette tangenti in A e in B all'iperbole.*
Soluzione. Le coordinate dei punti A e B si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2\,x^2-5\,y^2=-3 \\ y=-x \end{cases}$$

si trova $A(-1,1)$ e $B(1,-1)$. Per determinare le rette tangenti in A e B si procede come al solito. Si trovano le rette $y=-\dfrac{2}{5}(x+1)+1$ e $y=-\dfrac{2}{5}(x-1)-1$.

Esercizio 14. *Determina le coordinate dei punti di intersezione tra l'iperbole $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=-1$ e la circonferenza $x^2+y^2=41$.*
Soluzione. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=-1 \\ x^2+y^2=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{41-y^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=-1 \\ x^2=41-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=25 \\ x^2=41-25=16 \end{cases}$$

i punti di intersezione sono $(4,5)$, $(-4,5)$, $(4,-5)$, $(-4,-5)$.