7^ Lezione

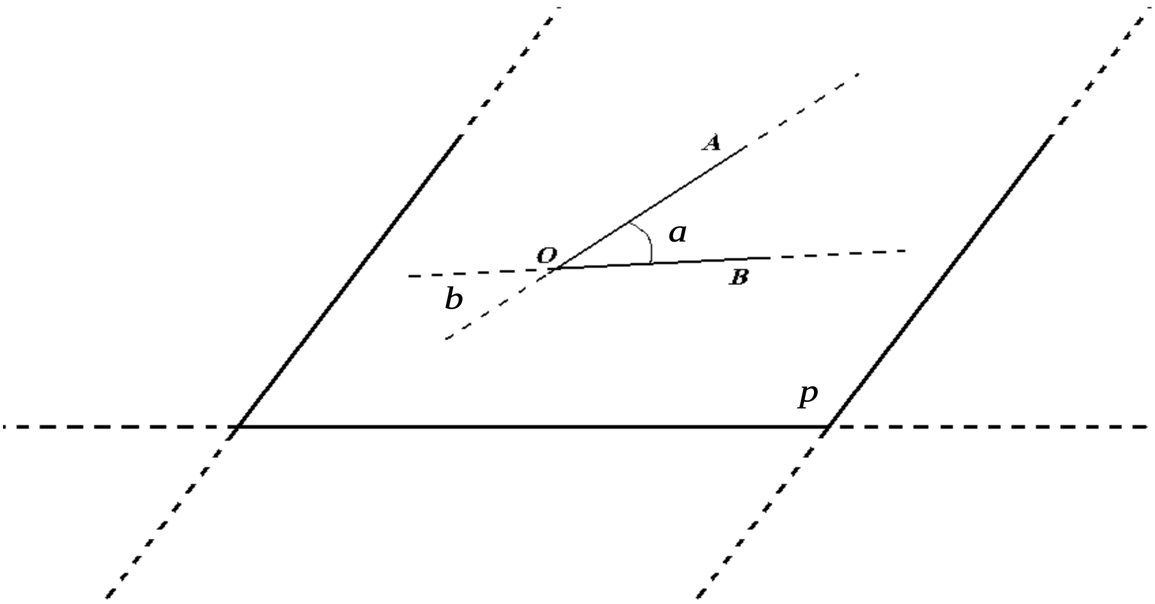
- Goniometria .Elementi di trigonometria piana .
- Unità di misura degli angoli .
- Misura di angoli orientati .
- Circonferenza goniometrica .
- Angoli e archi noti .
- Le funzioni senx , cosx e tgx .
- Relazioni fondamentali .
- Allegato Esercizi .

GONIOMETRIA

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA PIANA

Ricorderemo innanzitutto alcuni concetti di base sugli angoli. Definiremo **angolo** come la parte di piano limitata da due semirette uscenti da un punto comune detto vertice.

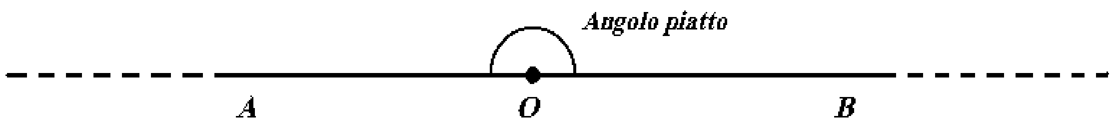
Es:



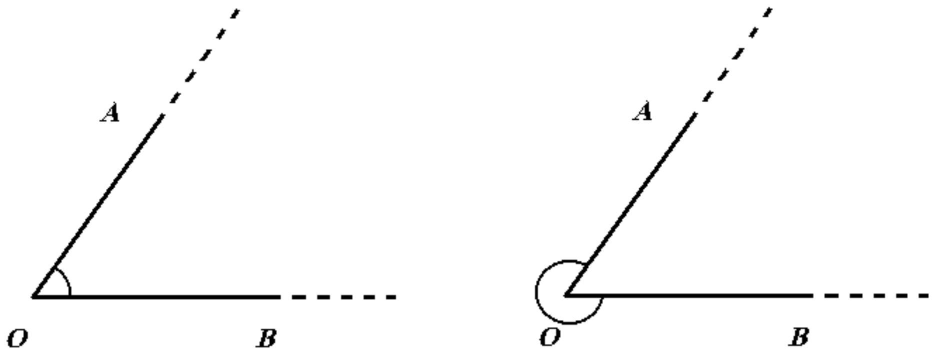
Le semirette OA e OB definiscono quindi sempre due angoli piani , notati $\hat{a}$, $\hat{b}$.

Le semirette OA e OB sono dette **lati** e O **vertice**.

La somma dei due angoli, in cui viene diviso un piano p , ci definisce quello che chiameremo **angolo giro** (360°).
Se i lati di un angolo sono opposti tra loro , i due angoli del piano sono detti **piatti**.



L'angolo non contenente il prolungamento dei suoi lati dicesi **convesso** , l'altro **concavo.**



UNITA' DI MISURA DEGLI ANGOLI

Sistema di misurazione sessagesimale :

Prevede la misura degli angoli in gradi. Per **grado** si intende la 360^ parte dell'angolo giro (la 90^ parte di un angolo retto).

La sessantesima parte di un grado si dice minuto primo, la sessantesima parte di un primo , minuto secondo.

Sistema di misurazione in radianti :

Per angolo radiante intenderemo l'angolo al centro di una circonferenza con raggio arbitrario, sotteso da un arco la cui misura uguaglia quella del corrispondente raggio.

Dal momento che vi è un rapporto di proporzionalità tra gli archi di circonferenza e i rispettivi angoli al centro, prendendo come unità di misura per gli archi il raggio e per gli angoli il radiante, consegue che le misure di arco e angolo vengono espresse dallo stesso numero.

Ecco dunque che se la misura di una circonferenza, riferita al proprio raggio , è espressa da $2p$, anche l'angolo giro , in radianti è $2p$. Allo stesso modo per l'angolo piatto (p) , l'angolo retto ($\frac{p}{2}$) .

Ecco che allora arriveremo ad esprimere la relazione che ci consentirà di volta in volta di passare dai gradi ai radianti e viceversa.

Indicando con x la misura in radianti di un angolo e con a la corrispondente misura in gradi avremo che:

$$360 : 2p = a : x$$

da cui:

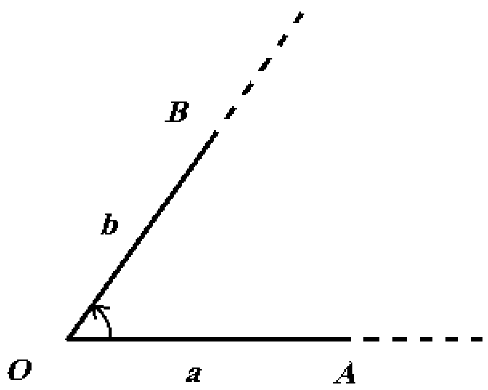
$$\boxed{x = \frac{a \cdot 2p}{360} = \frac{a \cdot p}{180}}$$

viceversa :

$$\boxed{a = \frac{x \cdot 180}{p}}$$

Definiremo come <u>angolo orientato</u> , quell'angolo i cui lati sono considerati in un certo ordine, cioè quando è stabilito quale dei due lati è da considerarsi come primo.

Es:

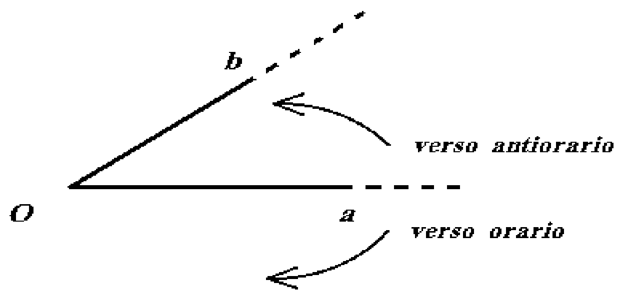


Angolo $\hat{ab}$, con a primo lato , b secondo lato.
Il lato a viene anche detto <u>lato origine</u> , b lato termine dell'angolo .

MISURA DI ANGOLI ORIENTATI

Abbiamo ricordato precedentemente cosa intendiamo per misura assoluta di un angolo; ora valuteremo cosa significhi misura relativa di un angolo.

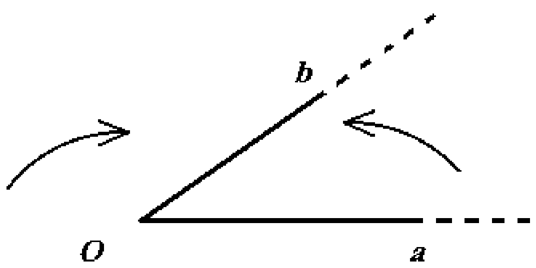
Se fissiamo su un piano un punto O e una semiretta a uscente da esso. La semiretta può ruotare attorno ad O in due versi opposti tra loro: verso antiorario e verso orario .



Convenzionalmente diremo il verso antiorario verso positivo , il verso orario verso negativo.

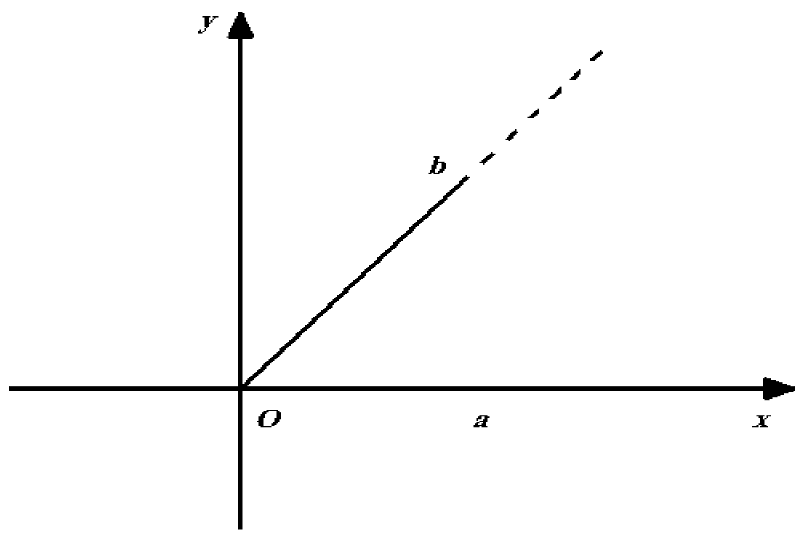
Definiremo quindi l'angolo orientato $a\hat{\ }b$, di vertice O , positivo , quando esso è descritto dal lato origine **a** tramite una rotazione positiva attorno ad O che porta **a** a sovrapporsi a **b**; l'angolo orientato $a\hat{\ }b$, negativo , quando esso è descritto dal lato origine **a** tramite una rotazione negativa attorno ad O che porta **a** a sovrapporsi a **b** .

Es:



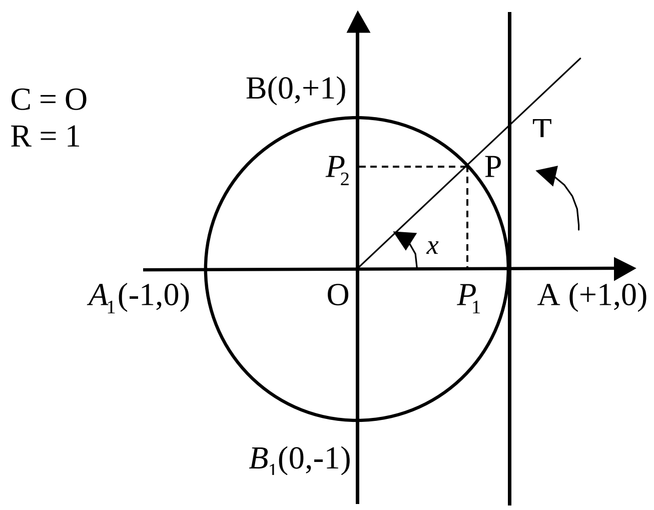
Angolo convesso $a\hat{}b$ ⟶ positivo
Angolo concavo $a\hat{}b$ ⟶ negativo

Chiameremo sistema cartesiano ortogonale associato all'angolo orientato $a\hat{}b$, di vertice O , il sistema d'assi avente per origine il vertice O , il semiasse positivo delle *x* coincidente con il lato origine a e il verso positivo dell'asse *y* tale che l'angolo orientato $x\hat{}y$ abbia come misura $+\frac{p}{2}$.



CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Definiremo circonferenza goniometrica (ossia riferita alla misura degli angoli), una circonferenza il cui centro coincide con l'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e il cui raggio è supposto di misura unitaria.



La semiretta a uscente dall'origine O incontra la circonferenza nel punto P e descrive a partire da A, intersezione dell'asse cartesiano con C, un angolo orientato x.
L'ordinata del punto P_2, proiezione di P sull'asse y, misura del segmento OP_2, esprime quella che chiameremo sen$x$.
Allo stesso modo l'ascissa del punto P_1, proiezione di P sull'asse x, misura del segmento OP_1, esprime il cos$x$.
Quindi il seno e il coseno di un angolo orientato sono funzioni dell'ampiezza dell'angolo stesso.
L'ordinata del punto T, intersezione di a con la tangente a C condotta da A, misura del segmento AT, esprime la tg$x$ nota come il rapporto tra $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Riassumendo :

$$\overline{OP_2} = \operatorname{sen} x$$
$$\overline{OP_1} = \cos x$$
$$\overline{AT} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = tgx$$

Nota: Con la linea sopra gli estremi di un segmento , in questo caso , indicheremo la loro misura.

E' del tutto evidente che il valore di sen$x$, cos$x$ e tg$x$ variano al variare dell'angolo x descritto.
Il valore di sen$x$ assumerà il valore minimo nel punto $B_1(0,-1)$ con valore -1 ; il valore massimo nel punto $B(0,+1)$ con valore +1 , ossia la misura completa del raggio; così come il cos$x$ che in $A_1(-1,0)$ ha valore -1 e in $A(+1,0)$ valore massimo 1. Parleremo quindi , per il seno e il coseno , di valori limitati tra -1 ed +1 .

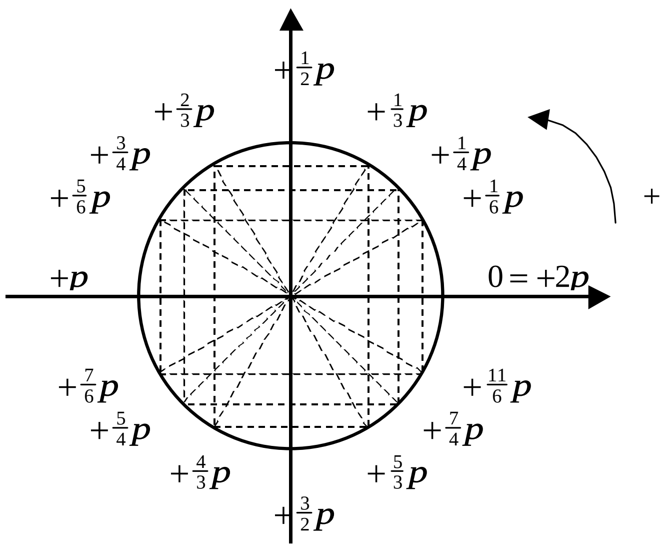
Più precisamente al crescere di x da 0 a $\frac{p}{2}$ il seno varia crescendo da 0 ad 1, assumendo tutti i valori intermedi. Da $\frac{p}{2}$ a p il seno varia decrescendo da 1 a 0 ; da p a $\frac{3}{2}p$ decresce da 0 a -1 ; e infine da $\frac{3}{2}p$ a $2p$ cresce da -1 a 0 .

Così come il coseno quando x varia da 0 a $\frac{p}{2}$ decresce da 1 a 0 ; con x da $\frac{p}{2}$ a p decresce da 0 a -1; con x da p a $\frac{3}{2}p$ cresce da -1 a 0 ; e con x da $\frac{3}{2}p$ a $2p$ cresce da 0 a 1.

Allo stesso modo non avrà valori limitati la $\operatorname{tg}x$, poiché esprime il rapporto tra seno e coseno e quindi i valori sono variabili in tutto il campo reale , tranne per quei valori di x che annullano il coseno ; in tali valori $+\frac{\pi}{2}$, $+\frac{3}{2}\pi$ la $\operatorname{tg}x$ non esiste .Quindi diremo che la tangente assume qualsiasi valore , positivo, negativo o nullo , nell'intervallo $(-\infty,+\infty)$.

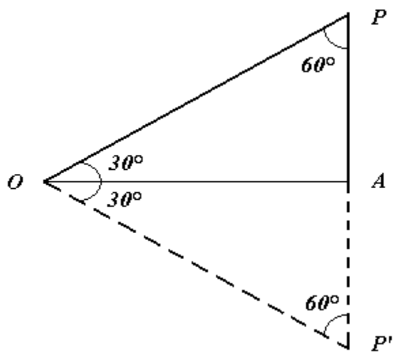
ANGOLI E ARCHI NOTI

Sarà interessante ora considerare il valore del sen$x$, cos$x$, tang$x$, per alcuni particolari valori dell'angolo x . Per particolari valori dell'angolo x intenderemo tutti quegli angoli multipli dell'angolo di 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ radianti .



Per calcolare i relativi corrispondenti valori delle funzioni sen$x$, cos$x$, tang$x$, per tali angoli , dobbiamo considerare le proprietà dei triangoli rettangoli .

Per determinare ad esempio il valore del seno e del coseno dell'angolo di $30°\left(+\frac{\pi}{6}\right)$ avremo:



$\cos x = OA$, $\operatorname{sen} x = AP$ e quindi per determinare tali valori sarà necessario valutare le proprietà del triangolo equilatero .

Quindi il sen$x$, per $x = +\frac{p}{6}$ vale la metà della misura del raggio : $\operatorname{sen}\left(+\frac{p}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Di conseguenza $\cos + \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Riassumendo avremo :</u>

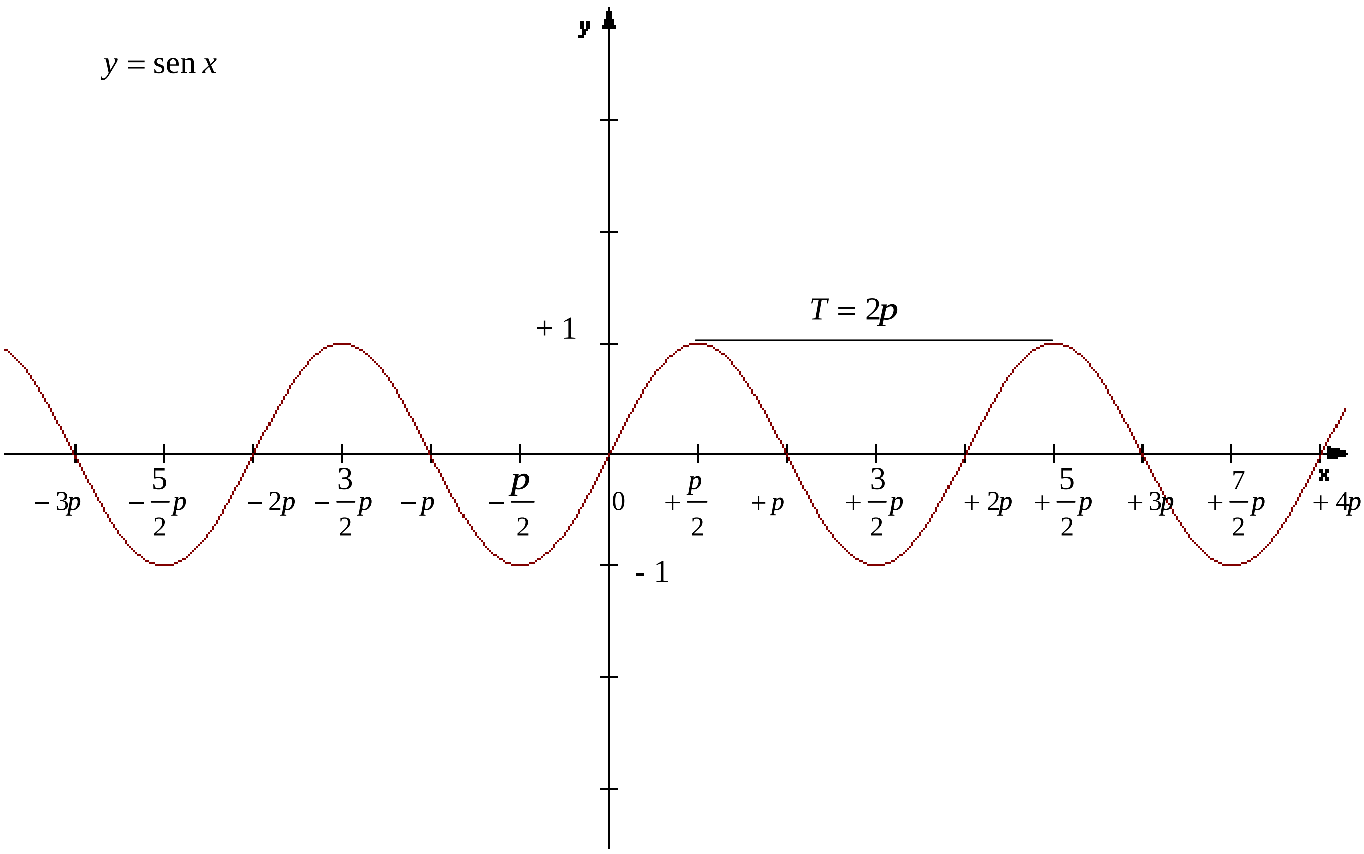
x	sen$x$	cos$x$	tang$x$
0 (0°)	0	+1	0
$+\frac{p}{6}$ (+30°)	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$
$+\frac{p}{4}$ (+45°)	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	+1
$+\frac{p}{3}$ (+60°)	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\sqrt{3}$
$+\frac{p}{2}$ (+90°)	+1	0	(∞)
$+\frac{2}{3}p$ (+120°)	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$+\frac{3}{4}p$ (+135°)	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$+\frac{5}{6}p$ (+150°)	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$+p$ (+180°)	0	-1	0

Abbiamo considerato quindi tutti i valori del seno , del coseno e della tangente di quelli che chiameremo archi (angoli) noti , limitatamente ai primi due quadranti ; lasceremo al lettore il compito di ultimare la tabella per i rimanenti quadranti .

<u>LE FUNZIONI SENX , COSX , TANGX</u>

Ora diventa assai interessante riportare in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , i valori degli angoli (x, in radianti) , valutati in riferimento all'asse delle ascisse , e i corrispondenti valori del seno , coseno e tangente , valutati in riferimento all'asse delle ordinate .

Quindi indicando con x la misura in radianti di un angolo orientato e con y il corrispondente valore del seno , avremo il grafico seguente:



Per valori dell'angolo x variabili tra 0 e 2π , il seno assume gli stessi valori che egli assume quando la misura dell'angolo varia da 2π a 4π , da 4π a 6π , ecc. così come per l'angolo che varia da -2π a -4π , da -4π a -6π , ecc.

Tale proprietà definisce quella che chiameremo **<u>periodicità di una funzione</u>**.

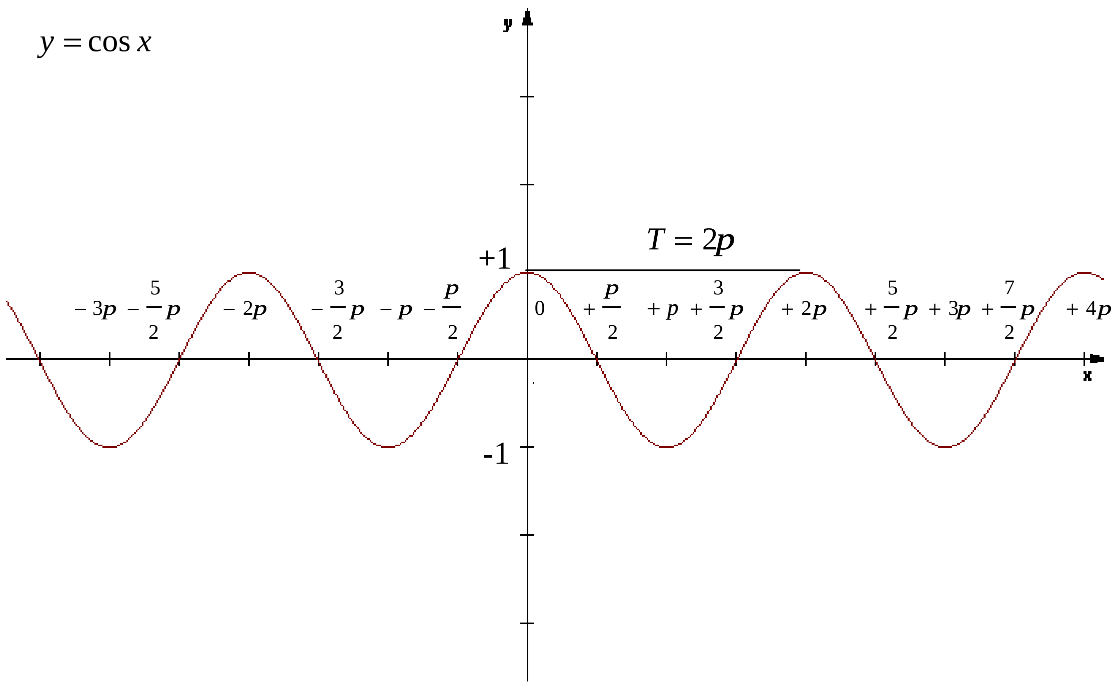
In sostanza definiremo periodo di una funzione l'intervallo (valutato in radianti) per il quale la funzione riassume gli stessi valori assunti nell'intervallo $[0,2\pi]$.
Quindi la funzione seno è una funzione periodica dell'angolo , con periodo 2π radianti .

La relazione che qualifica una funzione periodica è:

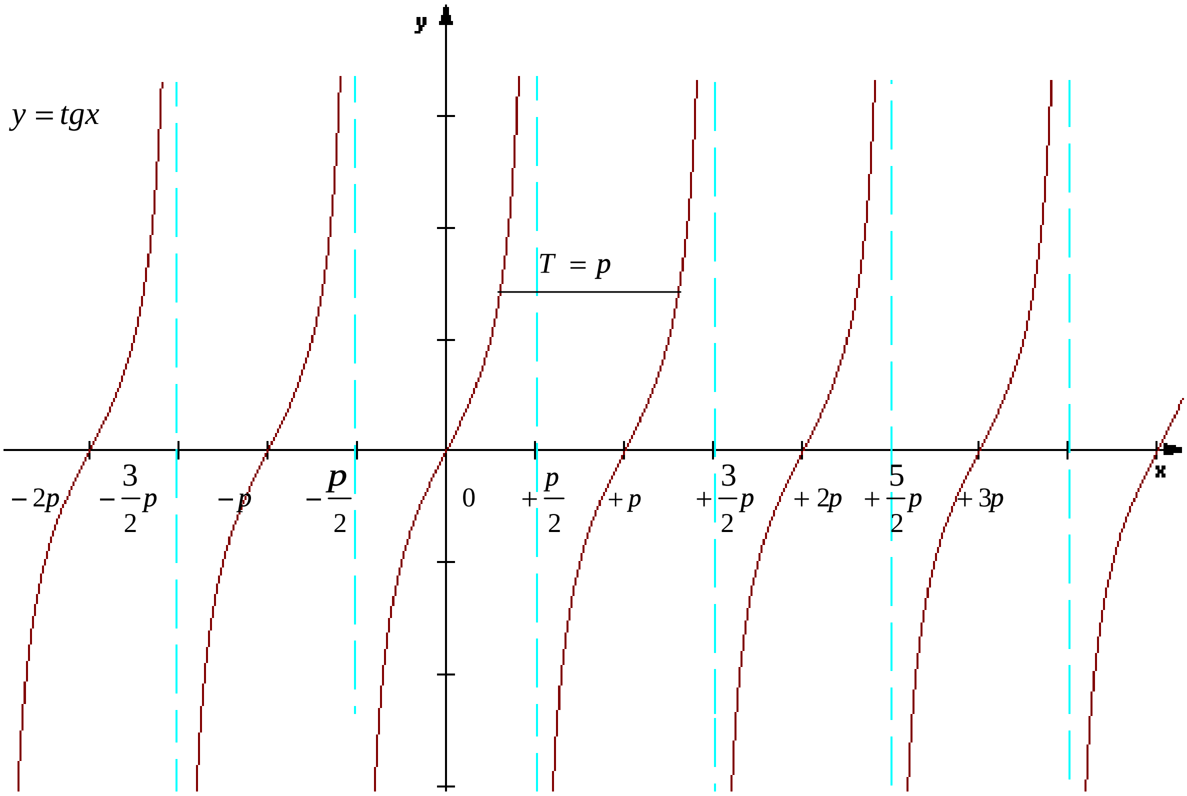
$$\boxed{F(x+T)=F(x)}$$

con $T=2\pi$, **<u>periodo</u>** .

Allo stesso modo la funzione coseno è una funzione periodica di periodo $T=2\pi$.



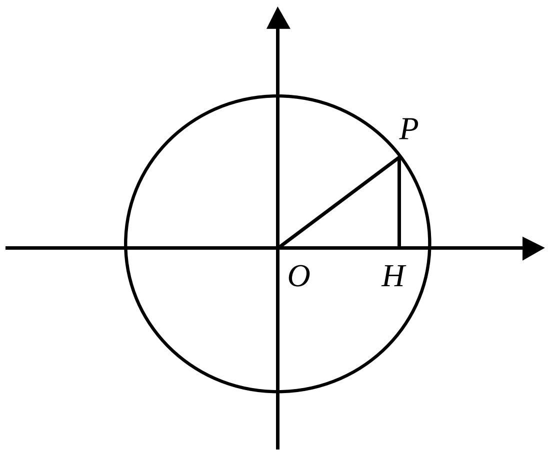
Infine rappresenteremo la funzione $\tan x$ avente il periodo $T = \pi$, dimezzato rispetto alle funzioni seno e coseno .



<u>RELAZIONI FONDAMENTALI</u> (per uno stesso angolo orientato)

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPH si ottiene :

$$\overline{OH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{OP}^2$$



E quindi con la relativa sostituzione si ha:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

detta **<u>relazione fondamentale della trigonometria</u>**

e di qui poi si possono ottenere le :

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x} \qquad \boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

e anche :

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}} \qquad \boxed{\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$$

Inoltre per determinati tipi di problemi che si riscontreranno in seguito , citeremo le seguenti formule , non dimostrate.

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x}$$

formule di duplicazione del seno

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

formule di duplicazione del coseno

$$\boxed{tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}}$$

formule di duplicazione della tangente

$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}$$

formule di bisezione del seno

$$\boxed{\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}$$

formule di bisezione del coseno

$$\boxed{tg \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}$$

formule di bisezione della tangente

$$\boxed{\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen} \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}}$$

formule di Prostaferesi del seno

$$\boxed{\cos(p) - \cos(q) = -2 \operatorname{sen} \frac{p - q}{2} \operatorname{sen} \frac{p + q}{2}}$$

formule di Prostaferesi del coseno

ESERCIZI SUL CALCOLO DELLE ESPRESSIONI GONIOMETRICHE

ESERCIZI SULLE IDENTITA' GONIOMETRICHE

USO DEI PULSANTI

?	Visualizza solo la soluzione dell'esercizio
RISOLVI	Visualizza le soluzioni di tutti gli esercizi
NASCONDI	Nasconde le soluzioni
ESERCIZI	Torna all'indice degli esercizi
INDICE	Torna all'indice della lezione

Calcolare il valore delle seguenti espressioni goniometriche :

1. $2\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{3} - tg\pi - \cos\dfrac{\pi}{4}$

2. $1 - \mathrm{sen}^2\dfrac{\pi}{6} - \cos(-2\pi) + \cos\dfrac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{sen}(-\pi)$

3. $tg(30°) + \cos^2(-45°) - \cos(-60°) + \mathrm{sen}(30°)$

4. $5 + \mathrm{sen}\left(2\cdot\dfrac{\pi}{3}\right) - 3\cos(-2\pi) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\pi) - 2\left(\mathrm{sen}^2\pi + \cos^2\pi\right)$

5. $\mathrm{sen}(30°) - tg(45°)\cos^2(-45°) - \dfrac{2}{\mathrm{sen}^2(-45°)} + \cos(60°)$

6. $tg\left(\frac{p}{4}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{3}{4}p\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{p}{3}\right)$?

7. $\text{sen}\left(5\cdot\frac{p}{3}\right)+3\cos(-2p)-\cos(2p)-2(\text{sen}\,p-2)$?

8. $\text{sen}(-p)+\text{sen}(-2p)-\cos(p)$?

9. $\dfrac{2}{\text{sen}\left(5\cdot\frac{p}{6}\right)}-\dfrac{1}{tg\left(-\frac{3}{4}p\right)}-\cos(-4p)-2(-1+\text{sen}\,p)$?

10. $\dfrac{2}{\text{sen}(-30°)}-tg(135°)\cos(225°)-\dfrac{4}{\text{sen}^2(-270°)}+\cos(-120°)$?

Verificare le seguenti identità goniometriche utilizzando la relazione fondamentale e le formule di duplicazione : $\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ; \quad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \quad ; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)$

11. $-\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x(1 - 2\cos x)$?

12. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$?

13. $-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} + \cos x = 0$?

14. $3\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x + 3\cos 2x = 0$?

15. $2 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x$?

16. $4\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} 2x + \cos^2 x = (\cos x - 2\operatorname{sen} x)^2$?

17. $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$?

18. $-\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$?

19. $-6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = -1 + \cos 4x$?

20. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + 1} = tgx$?