1 EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Esempio 1 *Risolvere*

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soluzione. *La misura dei due angoli positivi, minori di un angolo giro, che soddisfano l'equazione data sono:*

$$\frac{\pi}{4} \quad e \quad \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Tutte le soluzioni sono quindi date da:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

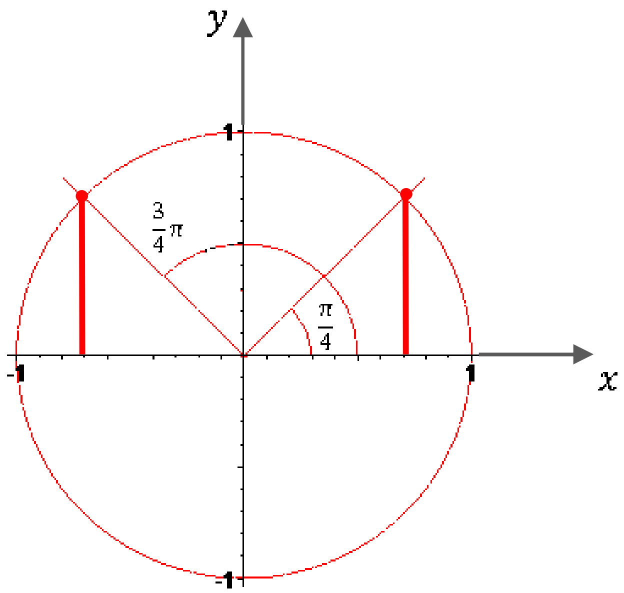

Figure 1: esempio 1

Esempio 2 *Risolvere*

$$cosx = -\frac{1}{2}$$

Soluzione. *Poichè* $cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, *l'equazione è soddisfatta per*

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \ \vee x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

indicando quest'ultimo angolo come $-\frac{2}{3}\pi$, *tutte le soluzioni sono date da:*

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

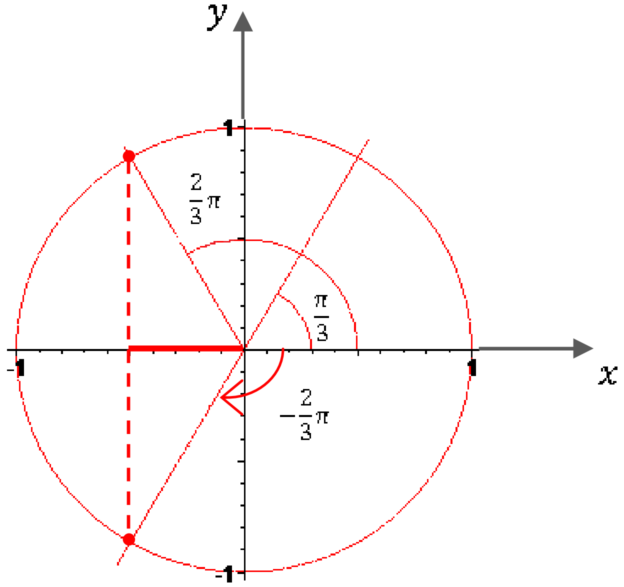

Figure 2: esempio 2

Esempio 3 *Risolvere*

$$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Soluzione. *Essendo*

$$tg\frac{\pi}{6} = \frac{sen\frac{\pi}{6}}{cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

allora il più piccolo angolo positivo che soddisfa l'equazione data è:

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

Tutte le soluzioni sono quindi date da:

$$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

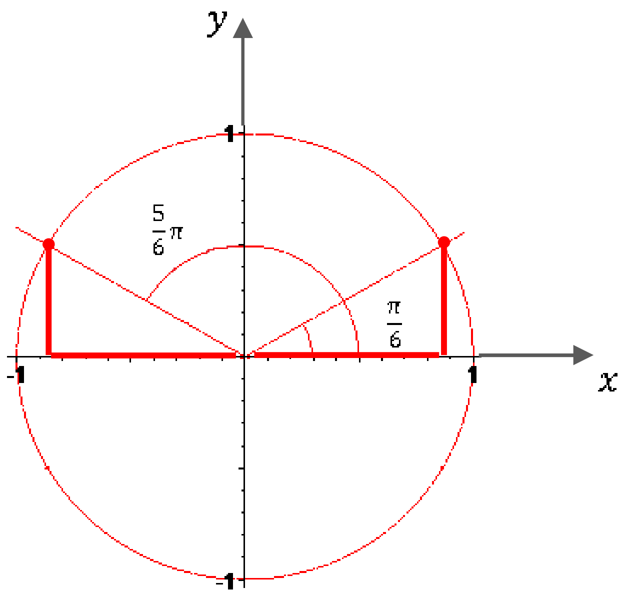

Figure 3: esempio 3

Esempio 4 *Assegnato*

$$sen\alpha = \frac{5}{13} \quad con \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

calcolare i rimanenti valori trigonometrici di α.
Soluzione. *Dall'identità fondamentale*

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Segue che:

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

Da cui

$$|cos\alpha| = \sqrt{\frac{144}{169}} \Rightarrow \begin{cases} cos\alpha = \frac{12}{13} & se \quad cos\alpha \geq 0 \\ cos\alpha = -\frac{12}{13} & se \quad cos\alpha < 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

quindi $cos\alpha < 0$. *Ne segue*

$$cos\alpha = -\frac{12}{13}.$$

Di conseguenza

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = -\frac{12}{13}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{12}{5}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} = -\frac{13}{12}$$

$$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{13}{5}$$

Esempio 5 *Risolvere l'equazione*

$$sen5x = sen2x$$

Soluzione. *Poichè*

$$senx = seny \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad x = y \quad oppure \quad x = y + 2k\pi \\ 2) \quad x = \pi - y \quad oppure \quad x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} 1) \quad 5x = 2x + 2k\pi \\ 2) \quad 5x = \pi - 2x + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad 3x = 2k\pi \\ 2) \quad 7x = (2k+1)\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad x = \frac{2}{3}k\pi \\ 2) \quad x = \frac{(2k+1)}{7}\pi \end{cases}$$

Esempio 6 *Risolvere l'equazione*

$$2sen^2x = 3cosx$$

Soluzione. *Dall'identità trigonometrica segue che*

$$sen^2x = 1 - cos^2x$$

da cui

$$2(1 - cos^2x) = 3cosx$$

$$\Downarrow$$

$$2cos^2 + 3cosx - 2 = 0$$

e ponendo $cosx = t$ *si ha*

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ \\ t_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

e per la posizione fatta

$$t_1 = -2 \Rightarrow cosx = -2 \quad \textit{impossibile}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Esempio 7 *Risolvere l'equazione*

$$senx - \sqrt{3}cosx = 0$$

Soluzione. *Dividiamo ambo i membri di questa equazione per* $cosx$*. Questa divisione è lecita perchè se fosse* $cosx = 0$ *dall'equazione risulterebbe anche* $senx = 0$*, e ciò è impossibile poichè per nessun angolo vale* $senx = cosx = 0$*. Si ottiene dunque l'equazione equivalente*

$$tgx - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$$

Esempio 8 *Risolvere l'equazione*

$$sen^2x + cosx = 1 + cosx(cosx + 1)$$

Soluzione. *Semplificando si ha*

$$sen^2x = 1 + cos^2x \quad e \ da \quad cos^2x = 1 - sen^2x \quad segue$$

$$sen^2x = 1 + 1 - sen^2x$$

$$\Downarrow$$

$$2sen^2x = 2$$

$$\Downarrow$$

$$|senx| = 1 \Rightarrow \quad \begin{cases} senx = 1 \quad se \quad senx \geq 0 \\ \\ senx = -1 \quad se \quad senx < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \\ x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$$

Esempio 9 *Risolvere l'equazione*

$$cos2x - senx = 0$$

Soluzione. *Ricordando che*

$$cos2x = cox^2x - sen^2x$$

l'equazione si può riscrivere

$$cos^2x - sen^2x - senx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$1 - sen^2x - sen^2x - senx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2sen^2x + senx - 1 = 0 \quad e \ ponendo \quad t = senx$$

$$\Downarrow$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

e per la posizione fatta

$$t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow senx = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \\ x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$t_2 = -1 \Rightarrow senx = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Esempio 10 *Risolvere l'equazione*

$$senx + cosx = 1$$

Soluzione. *Si può utilizzare il* metodo della risoluzione grafica.*Esso consiste nell'associare all'equazione data la relazione fondamentale*

$$sen^2x + sen^2x = 1.$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} senx + cosx = 1 \\ \\ sen^2x + sen^2x = 1 \end{cases}$$

Se

$$\begin{cases} X = cosx \\ \\ Y = senx \end{cases}$$

il sistema si riscrive

$$\begin{cases} X + Y = 1 \\ \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 1 - X \\ \\ X^2 + 1 + X^2 - 2X = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2X(X-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ \\ X_2 = 1 \end{cases}$$

I punti di intersezione tra la circonferenza

$$X^2 + Y^2 = 1$$

e la retta

$$Y + X = 1$$

sono pertanto i punti

$$\begin{cases} X_1 = 0 \quad & Y_1 = 1 \\ X_2 = 1 \quad & Y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cosx = 0 & senx = 1 \\ cosx = 1 & senx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & k \in Z \\ x = 2k\pi, & k \in Z \end{cases}$$

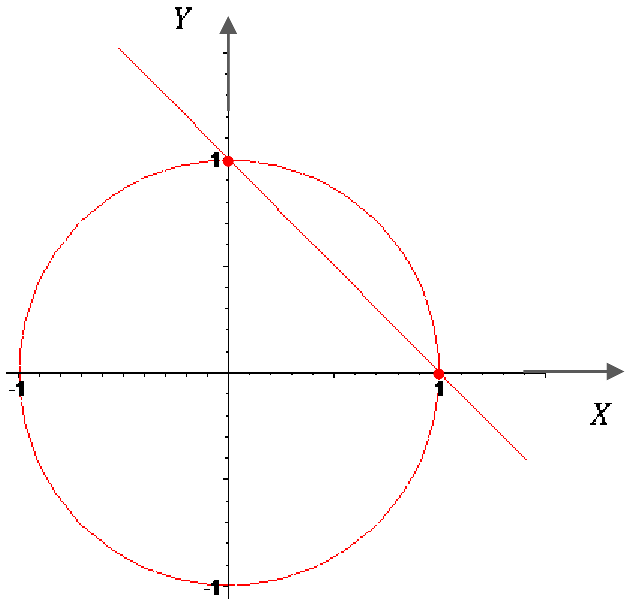

Figure 4: esempio 10

2 DISEQUAZIONE GONIOMETRICHE

Esempio 11 *Risolvere la disequazione*

$$senx > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluzione. *Sapendo che*

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

per

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

considerando la circonferenza trigonometrica o il grafico della funzione seno, la disequazione è verificata per

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

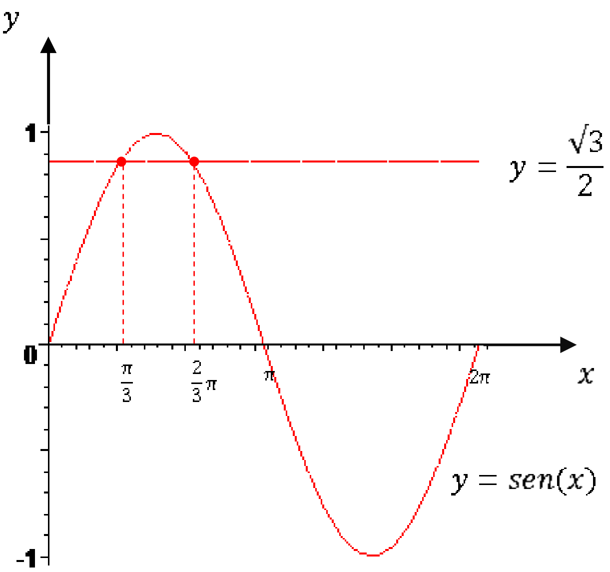

Figure 5: esempio 11

Esempio 12 *Risolvere la disequazione*

$$senx > -1$$

Soluzione. *La disequazione è sempre verificata tranne per* $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Esempio 13 *Risolvere la disequazione*

$$senx < -\frac{1}{2}$$

Soluzione. *Ricordiamo che*

$$senx = -\frac{1}{2}$$

per

$$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \quad \vee \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

La disequazione è quindi soddisfatta per

$$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

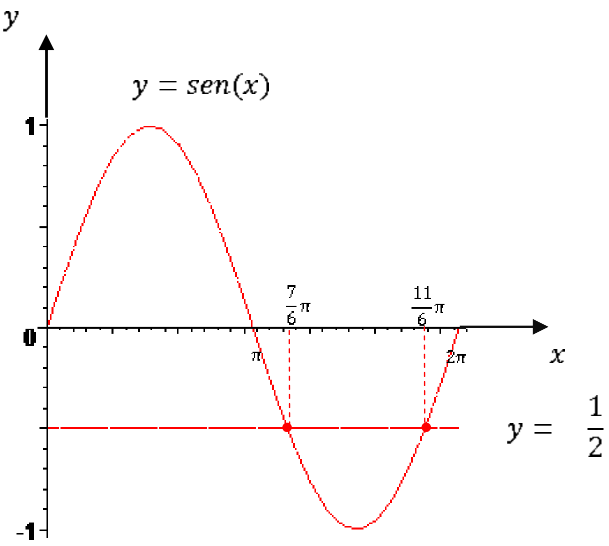

Figure 6: esempio 13

Esempio 14 *Risolvere la disequazione*

$$senx < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluzione. *Ricordiamo che*

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

per

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Indicando il secondo angolo come $-\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4}{3}\pi$ *la disequazione è soddisfatta per*

$$-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Esempio 15 *Risolvere la disequazione*

$$sen^2x > \frac{1}{2}$$

Soluzione. *La disequazione si trasforma nelle due disequazioni*

$$senx > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad senx < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con opportune considerazioni sulla circonferenza trigonometrica si trova che la disequazione è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$

Esempio 16 *Risolvere la disequazione*

$$|tgx| < \sqrt{3}$$

Soluzione. *Consideriamo la disequazione nell'intervallo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *e costruiamo i grafici delle funzioni* $y = |tgx|$ *e* $y = \sqrt{3}$.

Il periodo dlla funzione $y = |tgx|$ *è* π. *Dal grafico (fig.7) è evidente che la soluzione della disequazione è data da tutti gli* x *dell'intervallo* $(-\alpha, \alpha)$, *dove* α *è l'ascissa del punto di intersezione dei due grafici per* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *cioè la soluzione dell'equazione*

$$tgx = \sqrt{3}$$

in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Essendo dunque $\alpha = \frac{\pi}{3}$, *la soluzione della disequazione è*

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Esempio 17 *Risolvere la disequazione*

$$senx + \sqrt{3}cosx - \sqrt{3} < 0$$

Soluzione. *Si utilizzano le formule parametriche*

$$sen\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$con \quad t = tg\frac{\alpha}{2} \quad e \quad \alpha \neq (1+2k)\pi$$

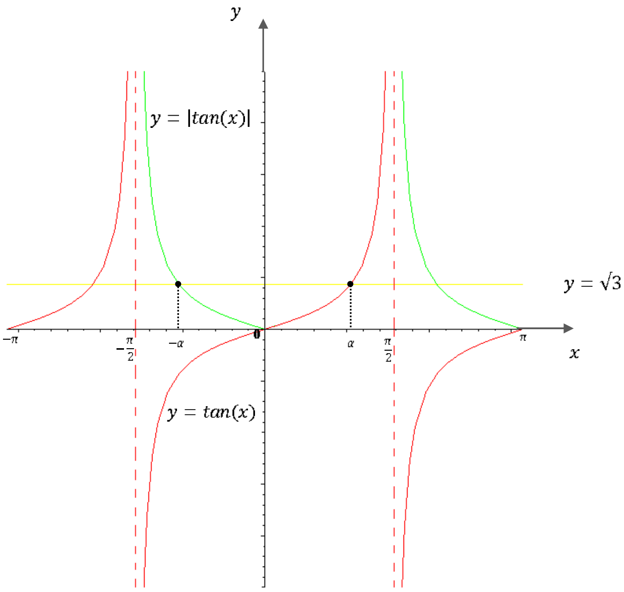

Figure 7: esempio 16

Poichè

$$sen(\pi + 2k\pi) + \sqrt{3}cos(\pi + 2k\pi) - \sqrt{3} = 0 - \sqrt{3} - \sqrt{3} < 0,$$

allora gli angoli $\pi + 2k\pi$ *sono soluzioni della disequazione.*
Per tutti gli altri angoli si ha:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2} - \sqrt{3} < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3}t^2 - t > 0 \quad \Rightarrow \quad t(\sqrt{3}t - 1) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$t < 0, \quad t > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ma $t = tg\frac{x}{2}$ *quindi*

$$t = tg\frac{x}{2} < 0 \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} < \pi + k\pi \quad \Rightarrow \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

$$t = tg\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (tg\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi)$$

$$da\ cui \quad \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

Esempio 18 *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{3}senx - cosx > 0$$

Soluzione. *Supposto $cosx \neq 0$, cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dividiamo i due membri per $cosx$. Poichè $cosx$ non ha segno costante, bisogna distinguere i due casi: $cosx > 0$ e $cosx < 0$. Si ottengono i due sistemi:*

$$\begin{cases} \sqrt{3}tgx - 1 > 0 \\ \\ cosx > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt{3}tgx - 1 < 0 \\ \\ cosx < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} tgx > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ cosx > 0 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} tgx < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ cosx < 0 \end{cases}$$

La prima disequazione del primo sistema è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

La seconda disequazione è soddisfatta per

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

Da cui segue che il primo sistema è soddisfatto per

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

mentre il secondo sistema è soddisfatto per

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

Tenendo presente che anche $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *verifica la disequazione data, in definitiva questa è soddisfatta per*

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in Z$$

Volendo risolvere la stessa disequazione con il metodo grafico si pone

$$X = cosx, Y = senx$$

e si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}Y - X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y > \frac{\sqrt{3}}{3}X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

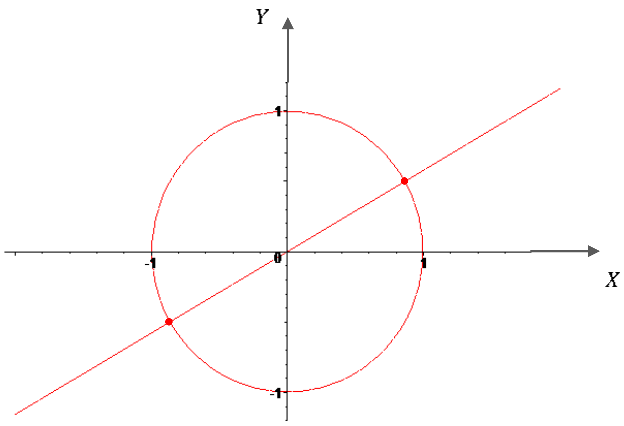

Figure 8: esempio 18

La retta $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}X$ *forma con la direzione positiva dell'asse* x *un angolo di* $\frac{\pi}{6}$ *radianti, e incontra la circonferenza nei punti* A *e* B *cui corrispondono rispettivamente un angolo di* $\frac{\pi}{6}$ *radianti e un angolo di* $\frac{7}{6}\pi$ *radianti. Come soluzione troviamo ancora*

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in Z$$

Esempio 19 *Risolvere con il metodo grafico la disequazione*

$$senx + cosx - 1 \geq 0$$

Soluzione. *Ponendo*

$$X = cosx, \quad Y = senx$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} Y + X - 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} Y + X - 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y \geq 1 - X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y \geq 1 - X \\ X^2 + 1 + X - 2X^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$2X(X-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \Rightarrow Y = 1 \\ X = 1 \Rightarrow Y = 0 \end{cases}$$

La retta $X + Y - 1 = 0$ *incontra la circonferenza di raggio unitario nei punti* $A(0,1)$ *e* $B(1,0)$ *e il semipiano soluzione è quello in alto rispetto alla retta.*
La soluzione della disequazione data è quindi

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$