PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA A (II MODULO)

Ingegneria Informatica (A-E) e Ingegneria Elettrica
A.A. 2000/2001 (Massimo CICOGNANI)

Nota: è richiesta la dimostrazione degli argomenti asteriscati.

1 Equazioni differenziali lineari del II ordine

Equazioni del secondo ordine. Struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, teorema del Wronskiano(*), metodo di Lagrange per la determinazione di un integrale particolare dell'equazione completa(*). Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti: integrale generale nei vari casi (radici reali distinte, coincidenti, complesse coniugate); metodi per simpatia. I problemi al contorno.

2 Serie numeriche

Serie geometrica(*); serie telescopiche; serie complesse: criterio di Cauchy di convergenza, convergenza assoluta, condizione necessaria di convergenza(*), criterio del confronto e del confronto asintotico; serie a termini positivi: divergenza e convergenza, criteri del rapporto, della radice, criterio integrale(*); serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz. Condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.(*)

3 Serie di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme e loro relazione, continuità del limite uniforme di funzioni continue(*), integrabilità del limite uniforme su intervalli compatti, condizioni sufficienti per la derivabilità del limite uniforme.
Serie di funzioni: convergenza puntuale, uniforme e totale e loro relazioni, continuità di una serie di funzioni uniformemente convergente, integrabilità termine a termine su intervalli compatti di serie di funzioni uniformemente convergenti, condizioni sufficienti per la derivabilità termine a termine di serie uniformemente convergenti.
Serie di potenze: raggio di convergenza, caratterizzazione del raggio di convergenza: *per una serie di potenze di punto iniziale $z_0 \in \mathbb{C}$ il raggio di convergenza ρ è caratterizzato dal fatto che per $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < \rho$ la serie converge e per $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \rho$ la serie non converge*(*), teorema di Hadamard sul calcolo del raggio di convergenza, convergenza totale su dischi di raggio strettamente minore del raggio di convergenza: *una serie di potenze di punto iniziale $z_0 \in \mathbb{C}$ e raggio di convergenza ρ converge totalmente su tutti i dischi* $\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq r\}$, $0 < r < \rho$(*), serie di potenze derivata e serie di potenze

integrale: *data una serie di potenze di raggio di convergenza ρ, allora anche la serie derivata e la serie integrale hanno lo stesso raggio di convergenza.* Sviluppabilità in serie di Taylor. Serie di Fourier di una funzione periodica e principali teoremi di convergenza (puntuale ed uniforme).

4 Funzioni di più variabili

Definizione di norma, di norme equivalenti, *tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti*, di norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz(*).
Coordinate polari, sferiche e cilindriche.
Funzioni vettoriali di una variabile reale: vettore tangente.
Funzioni numeriche di più variabili reali: derivate direzionali, derivate parziali.
Funzioni differenziabili, gradiente e matrice Jacobiana, derivate successive, matrice Hessiana. Teorema dei differenziali totali, teorema di Schwarz (sull'ordine di derivazione): la matrice Hessiana è simmetrica. Algebra delle funzioni differenziabili, differenziale della applicazione composta, teorema dell'invertibilità locale. *Il gradiente è la direzione di massima variazione della funzione. Una funzione definita su un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ avente ivi gradiente nullo è costante.* Piano tangente ad un grafico. Formula di Taylor del secondo ordine(*). Massimi e minimi locali; condizioni necessarie e condizioni sufficienti(*).
Varietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$, Teorema di Dini (delle funzioni implicite) ed applicazioni alle varietà differenziabili (parametrizzazioni), curve tracciate su una varietà e loro costruzione tramite il teorema di Dini, spazio tangente e spazio normale; estremanti vincolati; teorema dei moltiplicatori di Lagrange(*).

5 Integrale curvilineo

Curve parametrizzate: curve chiuse, regolari, semplici, regolari a tratti; curve equivalenti, verso di una curva; curve rettificabili. Retta tangente ad una curva, versore tangente. Curve in coordinate polari, forma polare di una curva. Lunghezza di una curva e sua dipendenza **solo** dalla classe di equivalenza della curva. Lunghezza d'arco.
Integrale curvilineo di una funzione scalare e di un campo vettoriale (forma differenziale). Proprietà principali. Forme differenziali chiuse e esatte. *Il lavoro di un campo conservativo non dipende dalla curva ma solo dagli estremi della curva stessa.* Potenziali. Condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma chiusa sia esatta. Il Teorema di Poincaré: *Una forma chiusa su un aperto stellato è esatta.* Calcolo di potenziali su rettangoli.

6 Integrali multipli

Richiami sulla misura di Peano-Jordan. Definizione di integrale di Riemann di funzioni di più variabili. Funzioni sommabili. Formule di riduzione. Cambiamenti di variabile. Passaggio al limite sotto il segno di integrale su insiemi limitati e misurabili in ipotesi di convergenza uniforme.