

PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA A (I MODULO)

Ingegneria Informatica (A-E) + Ingegneria Elettrica

A.A. 2000/2001 (Massimo CICOGNANI)

Nota: è richiesta la dimostrazione degli argomenti asteriscati.

1 Premesse

Rudimenti di Logica Matematica: proposizioni, connettivi logici, predicati, quantificatori universali ed esistenziali.

Teoria (ingenua) degli insiemi: sottoinsiemi, operazioni tra insiemi, prodotto cartesiano.

Relazioni di equivalenza e d'ordine, $\max$ $\min$ $\sup$ ed $\inf$ di sottoinsiemi di un insieme ordinato.

Funzioni: iniettive, suriettive, biettive, funzioni composte, inverse, *una funzione è invertibile se e solo se è biettiva*, unicità della funzione inversa(*), proprietà della controimmagine e della immagine funzionale di sottoinsiemi(*), funzioni monotone, funzioni circolari inverse.

2 Insiemi numerici

Il campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq) : \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, estremo superiore ed inferiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, proprietà di $\mathbb{R}$ (compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto, $\mathbb{R}$ è archimedeo, densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, *ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente (risp. inferiormente) limitato ammette $\sup$ (risp. $\inf$)*). Principio di induzione, disuguaglianza di Bernoulli(*), formula di Newton del binomio(*), formula di sommazione della progressione geometrica(*). La funzione $|x|$, $x \in \mathbb{R}$, e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare(*).

3 Numeri complessi

Forma algebrica, modulo di un numero complesso e sue proprietà(*), forma trigonometrica, radici, equazioni algebriche in campo complesso.

4 Limiti

Definizione di spazio metrico, intorni circolari, aperti, chiusi, loro proprietà rispetto ad unione ed intersezione. Punti di accumulazione e di aderenza. Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme. Teorema di Bolzano-Weierstrass (*Un sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}^n$ ha almeno un punto di accumulazione*), insiemi connessi e compatti di $\mathbb{R}^n$. Definizione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Successioni regolari. Forme indeterminate. *Una successione convergente ad un limite reale è limitata*(*). Il teorema della permanenza del segno per successioni(*). Limiti di successioni e relazione d'ordine. Il

teorema del confronto (*Teorema dei due carabinieri*) per successioni. Algebra dei limiti delle successioni regolari (in particolare: il limite della somma(*) e del prodotto(*) nei casi in cui i limiti esistano in $\mathbb{R}$). Limite di una successione monotona(*): Se $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$ è una successione crescente (risp. decrescente), allora $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è regolare e vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ (risp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$). Due teoremi utili per le successioni: se $\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$, allora: $\ell < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$, $\ell > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$; se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è come prima e $a_{n+1}/a_n \rightarrow \ell \in [0, +\infty]$, allora $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \ell$. Definizione di $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, a punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Località del limite, unicità del limite(*), locale limitatezza delle funzioni convergenti, $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$ per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ con $x_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow +\infty$; limite destro e sinistro di funzioni numeriche di una variabile reale, composizione di limiti, teorema della permanenza del segno(*), limiti e relazione d'ordine. Il teorema del confronto (*Teorema dei due carabinieri*) nel caso delle funzioni, proprietà algebriche dei limiti (in particolare il limite della somma(*)). Il limite notevole

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ (*). Limiti di funzioni monotone di una variabile reale.

Definizione di limite per funzioni a valori vettoriali.

Funzioni vettoriali di una variabile reale: curve parametrizzate, traiettoria.

Continuità di funzioni $f: A(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^k$: algebra delle funzioni continue, teorema di Weierstrass, teorema di Bolzano, per ogni aperto $V \subset \mathbb{R}^m$ esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(V) = U \cap A$, per ogni chiuso $Z \subset \mathbb{R}^m$ esiste un chiuso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(Z) = C \cap A$, la composizione di funzioni continue dà luogo ad una funzione continua; se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su I intervallo compatto di $\mathbb{R}$, allora $f(I) = [\min_{x \in I} f(x), \max_{x \in I} f(x)]$; se f è una funzione monotona da un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, allora essa è continua se e solo se $f(I)$ è un intervallo; se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente monotona sull'intervallo I , allora f è iniettiva e la funzione inversa $f^{-1}: J = f(I) \rightarrow I$ è continua. Continuità di e^x , $\cos x$, $\sin x$ (*).

5 Derivazione

Funzioni numeriche di una variabile reale: derivata, derivata delle funzioni elementari ($D(x^n) = nx^{n-1}$ (*), $D(e^x) = e^x$ (*), $D(\sin x) = \cos x$ (*), $D(\cos x) = -\sin x$ (*)); equazione della retta tangente in un punto del grafico; differenziale; algebra delle derivate, derivata della funzione composta e della funzione inversa; teoremi di Rolle(*), Lagrange(*), Cauchy: se $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue, derivabili in (a, b) , e $g'(x) \neq 0$ su (a, b) , allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$; regola di De l'Hospital per il calcolo dei limiti; formula di Taylor con resti secondo Peano e Lagrange. Simboli di Landau ($f = O(g)$, $f = o(g)$, $f \sim g$ per $x \rightarrow a$). Ordine di un infinito e di un infinitesimo.

Studio del grafico: massimi e minimi locali, condizioni necessarie affinché un punto interno sia di massimo o minimo(*), una funzione continua su un intervallo ed ivi derivabile, con derivata nulla, è costante; derivata e monotonia(*), flessi, polinomio di Taylor e condizioni sufficienti di massimo/minimo locale o di flesso(*), concavità e convessità, significato geometrico, condizioni necessarie e sufficienti (Se $f: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile nell'intervallo

I, allora f è convessa se e solo una delle seguenti equivalenti condizioni (i), (ii), (iii) è soddisfatta: (i) per ogni $x_0 \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, per ogni $x \in I$; (ii) f' è crescente; (iii) Nel caso in cui f sia derivabile 2 volte: $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$), asintoti.

6 Integrale di Riemann (funzioni di una variabile)

Funzione integrale e primitive. Funzioni generalmente continue. Proprietà dell'integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale(*). Calcolo dell'integrale mediante una primitiva dell'integrando. Integrazione per parti(*) e per sostituzione. Metodo dei “fratti semplici”. Integrale improprio (generalizzato): condizione di Cauchy di convergenza, integrabilità assoluta in senso generalizzato implica integrabilità in senso generalizzato, teorema del confronto, convergenza tramite confronto con infiniti/infinitesimi campione.

7 Equazioni differenziali lineari del I ordine

Equazioni del primo ordine: struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea; struttura delle soluzioni dell'equazione non-omogenea (completa); metodo di Lagrange della variazione della costante arbitraria; formula risolutiva del problema di Cauchy.

8 Equazioni a variabili separabili non lineari del I ordine

Formule risolutive.