

## Campi vettoriali

1. Calcolare il lavoro del campo vettoriale  $F$  lungo la curva orientata  $\gamma$  nei seguenti casi.

- (a)  $F(x, y) = (xy, y^2 + 1)$ ,  $\gamma_1$  : segmento da  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ ;  
 $\gamma_2$  :  $\varphi(t) = (t^2, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ;  $\left[\frac{5}{3}, \frac{4}{5}\right]$
- (b)  $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$ ,  $\gamma$  : poligonale che congiunge  $(0, 1), (3, 1), (3, 4)$ ; [72]
- (c)  $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ ,  $\gamma$  :  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ; [0]
- (d)  $F(x, y) = \left(\frac{1}{x + x^2y}, \frac{-x^2}{x + x^2y}\right)$ ,  $\gamma$  : segmento da  $(1, 0)$  a  $(2, 1)$ ;  $\left[\log \frac{2}{3}\right]$
- (e)  $F(x, y) = \left(\frac{2 + 3xy}{\sqrt{1 + xy}}, \frac{x^2}{\sqrt{1 + xy}}\right)$ ,  $\gamma$  :  $\varphi(t) = (1 - t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ ; [-2]
- (f)  $F(x, y) = \left(\frac{2x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\right)$ ,  $\gamma$  : parabola  $y = 4 - x^2$  da  $(-2, 0)$   
a  $(2, 0)$ ;  $[4\sqrt{3}]$
- (g)  $F(x, y, z) = (x - z, 1 - xy, y)$ ,  $\gamma$  :  $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  $\left[\frac{29}{20}\right]$

2. Nei casi che seguono, stabilire se il campo  $F$  è conservativo sul proprio dominio di esistenza e calcolarne, in caso affermativo, un potenziale.

- (a)  $F(x, y) = (x - y, x + y)$ ; [ $F$  non è conservativo]
- (b)  $F(x, y) = (x + xy^2, y^2 + x^2y)$ ;  $\left[g(x, y) = \frac{y^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right]$
- (c)  $F(x, y) = (y \log y, x + x \log y)$ ; [ $g(x, y) = xy \log y$ ,  $y > 0$ ]
- (d)  $F(x, y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ ;  $\left[g(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)\right]$
- (e)  $F(x, y) = \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2}\right)$ ; [ $F$  non è conservativo]
- (f)  $F(x, y) = \left(\frac{2x + y}{\sqrt{x + y}}, \frac{-y}{\sqrt{x + y}}\right)$ .  $\left[g(x, y) = \frac{2}{3}(2x - y)\sqrt{x + y}, x + y > 0\right]$

3. Calcolare  $\int_{\partial^+ E} F$ , ove  $E$  è il trapezio del piano  $xy$  definito dalle condizioni  $0 \leq y \leq 2 - |x|$ ,  $y \leq 1$  ed  $F(x, y) = (2y + \cos x, x^4 - \sin y)$ . [-6]

4. Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'arco  $\gamma$  parametrizzato da:

$$\varphi(t) = \left( t + \frac{2}{t}, t^2 - 3t + 5 \right), \quad t \in [1, 2]. \quad \left[ \frac{25}{6} - 6 \log 2 \right]$$

5. Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'arco  $\gamma : \varphi(t) = (te^{-t}, te^t)$ ,  $t \in [0, 1]$  e dal segmento che ne congiunge gli estremi.  $\left[ \frac{1}{3} \right]$

6. Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'arco  $\gamma$  parametrizzato da:

$$\varphi(t) = (\cos t(1 + \sin t), 1 + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad [\pi]$$