

Curve e integrali curvilinei

1. Stabilire se la curva di equazioni parametriche $\varphi(t) = \left(t - \sin t \cos t, 4 \sin \frac{t}{2}\right)$, $t \in [0, \pi]$ è regolare e, in caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente ad essa nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{2}$. $\left[y = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

2. Calcolare la lunghezza dei seguenti archi.

(a) $\varphi(t) = \left(2t, \frac{t^2}{2} - \log t\right)$, $1 \leq t \leq 2$; $\left[\frac{3}{2} + \log 2\right]$

(b) $\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. $[\sqrt{3}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)]$

3. Rappresentare in ascissa curvilinea il segmento di estremi $(0, 1)$, $(\sqrt{3}, 2)$.

$$\left[s \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s, 1 + \frac{s}{2}\right), 0 \leq s \leq 2\right]$$

4. Calcolare $\int_{\gamma} (x + y^3) ds$, ove γ è il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$. $\left[\frac{3}{4}\sqrt{2}\right]$

5. Calcolare $\int_{\gamma} x^2 y ds$, ove γ è l'arco definito da $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. $\left[\frac{16}{3}\right]$

6. Calcolare $\int_{\gamma} y ds$, ove $\gamma: \varphi(t) = (t, \sqrt{t})$, $t \in [1, 2]$. $\left[\frac{9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}}{12}\right]$

7. Calcolare $\int_{\gamma} z ds$, ove $\gamma: \varphi(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, $t \in [0, \pi]$. $[10\pi^2]$

8. Calcolare $\int_{\gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, ove $\gamma: \varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$. $\left[\sqrt{2} \arctan \frac{5\pi}{2}\right]$

9. Data la curva (asteroide) di equazioni parametriche $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$, calcolarne la lunghezza, e l'integrale curvilineo della funzione $f(x, y) = x^2 y$ sulla restrizione $\varphi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. $\left[6, \frac{6}{385}\right]$