

Equazioni differenziali del primo ordine

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine, o risolvere il relativo problema di Cauchy. Specificare poi il più ampio intervallo su cui la soluzione è definita.

Equazioni a variabili separabili

$$(a) \quad y' = \frac{2ty}{t^2 - 1}; \quad [\{t \mapsto c|t^2 - 1| \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, t < -1 \text{ oppure } -1 < t < 1 \text{ oppure } t > 1; \\ y \equiv 0]$$

$$(b) \quad y' = \frac{1+t}{y}; \quad [\{t \mapsto \pm \sqrt{t^2 + 2t + c} \mid c \in \mathbb{R}\}, \\ c \leq 1: t < -1 - \sqrt{1-c} \text{ oppure } t > -1 + \sqrt{1-c} \\ c > 1: t \in \mathbb{R}]$$

$$(c) \quad y' + \frac{y+y^3}{2} \frac{1}{t} = 0; \quad \left[\left\{ t \mapsto \pm (c|t| - 1)^{-\frac{1}{2}} \mid c > 0 \right\}, t < -\frac{1}{c} \text{ oppure } t > \frac{1}{c}; y \equiv 0 \right]$$

$$(d) \quad \begin{cases} y'(y+1) = t-1, \\ y(0) = 0; \end{cases} \quad [y(t) = -t, t < 1]$$

$$(e) \quad \begin{cases} y' = y^2 \frac{1+t}{t^3}, \\ y(1) = 2; \end{cases} \quad \left[y(t) = \frac{2t^2}{1+2t-2t^2}, 0 < t < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$(f) \quad \begin{cases} y' = \frac{t^2 y}{1+t^3}, \\ y(1) = 2; \end{cases} \quad [y(t) = \sqrt{4(1+t^3)}, t > -1]$$

$$(g) \quad \begin{cases} t + y'e^{y+t} = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases} \quad [y(t) = \log(1+t) - t, t > -1]$$

$$(h) \quad \begin{cases} yy' = (4 - y^2) \tan t, \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}. \end{cases} \quad [y(t) = 2 \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}]$$

Equazioni lineari

$$(a) \quad ty' - y = t^2 + 1; \quad [\{t \mapsto t^2 + ct - 1 \mid c \in \mathbb{R}\}, t < 0 \text{ oppure } t > 0]$$

$$(b) \quad y' - y = \cos t; \quad \left[\left\{ t \mapsto ce^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \mid c \in \mathbb{R} \right\}, t \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad y' + \frac{1}{2t}y = t^2; \quad \left[\left\{ t \mapsto \frac{c}{\sqrt{t}} + \frac{2}{7}t^3 \mid c \in \mathbb{R} \right\}, t > 0 \right]$$

$$(d) \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{t^2} + e^{t-\frac{1}{t}}, \\ y(1) = 2; \end{cases} \quad \left[y(t) = e^{-\frac{1}{t}}(e^t + e), t > 0 \right]$$

$$(e) \quad \begin{cases} y' = \frac{\log t}{t}(y - 2), \\ y(1) = 4; \end{cases} \quad \left[y(t) = 2(e^{\frac{1}{2} \log^2 t} + 1), t > 0 \right]$$

$$(f) \quad \begin{cases} (t+1)y' = ty + 1, \\ y(0) = 1; \end{cases} \quad \left[y(t) = \frac{2e^t - 1}{t+1}, t > -1 \right]$$

$$(g) \quad \begin{cases} (t^2 - 1)(y' - t) = ty, \\ y(0) = 1; \end{cases} \quad \left[y(t) = t^2 - 1 + 2\sqrt{1 - t^2}, -1 < t < 1 \right]$$

$$(h) \quad \begin{cases} y' = y \tan t + \tan t, \\ y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2. \end{cases} \quad \left[y(t) = \frac{1 - 2 \cos t}{2 \cos t}, \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \right]$$