Serie di Fourier

1. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2) della seguente funzione

$$g : (-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} -1-t, & t \in (-1,0], \\ 1-t, & t \in (0,1]. \end{cases}$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(2)$ e $s(3)$.

2. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2π) della seguente funzione

$$g : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = t.$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(\frac{\pi}{2})$ e $s(3\pi)$.

3. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 4) della seguente funzione

$$g : (-2,2] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} -t-2, & t \in (-2,-1], \\ t, & t \in (-1,1], \\ 2-t, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(-3)$.

4. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2π) della seguente funzione

$$g : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\pi,0], \\ \cos t, & t \in (0,\frac{\pi}{2}], \\ 0, & t \in (\frac{\pi}{2},\pi). \end{cases}$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(4\pi)$ e $s(7\pi)$.

5. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2α) della seguente funzione

$$g : [0,2\alpha) \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\alpha], \\ \alpha^2 - (t-2\alpha)^2, & t \in (\alpha,2\alpha); \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

(b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(\alpha^2)$ e $s(3\alpha)$.

6. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 4) della seguente funzione

$$g : (-2, 2] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} -\beta t, & t \in (-2, 0], \\ \alpha t, & t \in (0, 2]; \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

(b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(4\alpha)$ e $s(4\alpha + 2)$.

7. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2) della seguente funzione

$$g : (-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = t\, e^{\pi t}.$$

(a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

(b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(7)$, $s(16)$ e $s(-\frac{11}{2})$.

8. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2) della seguente funzione

$$g : [-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t^4, & t \in [-1, 0), \\ t^2, & t \in [0, 1). \end{cases}$$

(a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

(b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(2h)$, $s(\frac{h}{2})$ e $s(2h + 1)$, $h \in \mathbb{Z}$.

9. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 7) della seguente funzione

$$g : [-3, 4) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t^2 - 5, & t \in [-3, 3], \\ 0, & t \in (3, 4). \end{cases}$$

(a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

(b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(4)$ e $s(8)$.

10. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2α) della seguente funzione

$$g : [0, 2\alpha) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \alpha], \\ (t - \alpha)^2, & t \in (\alpha, 2\alpha); \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

(b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(3\alpha)$ e $s(\frac{3}{2}\alpha)$.

11. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 2α) della seguente funzione

$$g : [0, 2\alpha) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0, \alpha], \\ \alpha^2, & t \in (\alpha, 2\alpha); \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(3\alpha)$ e $s(6\alpha)$.

12. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 3) della seguente funzione

$$g : [0, 3) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0, 2], \\ 1, & t \in (2, 3). \end{cases}$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(5)$ e $s(9)$.

13. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 4) della seguente funzione

$$g : [0, 4) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, 4). \end{cases}$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(3)$ e $s(6)$.

14. Sia g_p la ripetizione periodica (di periodo 4) della seguente funzione

$$g : [-2, 2) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} t, & t \in [-2, 0], \\ 4 - 2t, & t \in (0, 2). \end{cases}$$

   (a) Calcolare la serie di Fourier di g_p in forma complessa e reale.

   (b) Detta s la funzione somma della serie di Fourier, si calcoli $s(6)$, $s(8)$ e $s(501)$.

Risultati

1. $g_p(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi x), \quad g_p(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{-i}{k\pi} e^{ik\pi x};$

2. $g_p(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \quad g_p(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{i(-1)^k}{k} e^{ikx};$

3. $g_p(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2} x\right),$

   $g_p(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4i(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2} e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2}x};$

4. $g_p(x) \sim \frac{1+\pi}{2\pi} + \left(\frac{3i}{4\pi} + \frac{1}{8}\right) e^{ix} + \left(-\frac{3i}{4\pi} + \frac{1}{8}\right) e^{-ix} +$

   $+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}} \frac{i(1-(-1)^k+(-1)^k k^2)+ke^{-ik\frac{\pi}{2}}}{k(1-k^2)} e^{ikx},$

   $g_p(x) \sim \frac{1+\pi}{2\pi} + \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{2\pi}\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cos(2kx)-2k\sin(2kx)}{1-4k^2}$

   $+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4k^2-4k+1+(-1)^{k+1}(2k+1)}{4k(k+1)(2k+1)} \sin((2k+1)x);$

5. $g_p(x) \sim \frac{\alpha^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}2\alpha^2}{k^2\pi^2}\cos(k\frac{\pi}{\alpha}x) - \frac{\alpha^2 k\pi^2+2\alpha^3(1-(-1)^k)}{k^2\pi^3}\sin(k\frac{\pi}{\alpha}x)\right),$

   $g_p(x) \sim \frac{\alpha^2}{3} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\alpha^2 i(k^2\pi^2+1-(-1)^k)-\alpha^2 2k\pi(-1)^k}{2k^3\pi^3} e^{ik\frac{\pi}{\alpha}x};$

6. $g_p(x) \sim \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{2(\alpha+\beta)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^k-1)}{k^2\pi}\cos(k\frac{\pi}{2}x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\frac{\pi}{2}x)\right),$

   $g_p(x) \sim \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k ik\pi+(-1)^k-1}{k^2\pi} e^{ik\frac{\pi}{2}x};$

7. $g_p(x) \sim \frac{\pi(e^\pi+e^{-\pi})-e^\pi+e^{-\pi}}{2\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k\cos(k\pi x)(\pi(k^2+1)(e^\pi+e^{-\pi})+(k^2-1)(e^\pi-e^{-\pi}))}{\pi^2(1+k^2)^2}\right.$

   $\left.+ \frac{(-1)^{k+1}k\sin(k\pi x)(\pi(k^2+1)(e^\pi+e^{-\pi})-2(e^\pi-e^{-\pi}))}{\pi^2(1+k^2)^2}\right),$

   $g_p(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k e^{ik\pi x}}{1-ik}\left(e^\pi + e^{-\pi} - \frac{e^\pi-e^{-\pi}}{\pi(1-ik)}\right).$