

Curriculum attività scientifica

Io sottoscritta Chiara Cinti, nata a Bologna il 21/03/1979,

- ho superato l'esame di maturità scientifica presso il liceo scientifico statale A.B. Sabin di Bologna con la votazione di 60/60, nell'anno scolastico 1996-1997;
- ho superato l'esame di laurea in Matematica presso l'Università di Bologna con la votazione di 110/110 e lode in data 20 luglio 2001, con una tesi dal titolo "*Teoria astratta del potenziale e applicazioni*" (relatore prof. E. Lanconelli);
- ho superato l'esame per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca in Matematica presso l'Università di Bologna con esito positivo in data 12 maggio 2005, con una tesi dal titolo "*Sui sub-Laplaciani reali e su una classe di operatori ultraparabolici sui gruppi di Lie stratificati*" (relatore prof. E. Lanconelli);
- 01/07/2005 - 01/07/2007: borsa di studio per attività di ricerca post-dottorato per l'A.A. 2004-2005, di durata biennale, assegnata dall'Università di Bologna (tutore prof. E. Lanconelli);
- 01/09/2007 - oggi: assegno di ricerca presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, nell'ambito di un progetto di ricerca dal titolo "*Analisi degli Operatori Differenziali Ipoellittici sui Gruppi di Lie*" (tutore prof. E. Lanconelli);
- 01/02/2009 - 30/06/2009: post-doc position presso "Institutionen för matematik och matematisk statistik", Umeå universitet, Umeå, Sweden (prof. K. Nyström);
- settembre 2009: Nomina a cultore della materia per il settore scientifico disciplinare MAT/05 (Analisi matematica) da parte del Consiglio di Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

Mi occupo di:

- Teoria del Potenziale per operatori differenziali del secondo ordine ipoellittici, di tipo ellittico-degenere e di tipo ultraparabolico, costruiti mediante campi vettoriali invarianti su gruppi di Lie omogenei;
- stime gaussiane dall'alto e dal basso per la soluzione fondamentale di operatori differenziali ipoellittici sui gruppi di Lie, in relazione con disuguaglianze di tipo Harnack per le soluzioni non negative. Studio dei problemi di controllo che intervengono nella prova delle suddette stime.

Collaborazioni scientifiche internazionali:

- dall'A.A. 2008-2009, sto collaborando con il prof. K. Nyström, Umeå universitet (Sweden) e con il prof. S. Polidoro, Università di Modena e Reggio Emilia; tale collaborazione fino ad oggi ha prodotto due pubblicazioni ed un preprint;
- dall'A.A. 2009-2010, sto collaborando con il prof. S. Menozzi, Université Paris VII (France) e con il prof. S. Polidoro, Università di Modena e Reggio Emilia; abbiamo un lavoro in preparazione.

Elenco delle pubblicazioni

Lavori pubblicati:

1. A. BONFIGLIOLI AND C. CINTI, *A Poisson-Jensen type representation formula for sub-harmonic functions on stratified Lie groups*, Potential Analysis, **22** (2005), 151–169;
2. A. BONFIGLIOLI AND C. CINTI, *The theory of energy for sub-Laplacians with an application to quasi-continuity*, Manuscripta Math., **118** (2005), 283–309;
3. C. CINTI, A. PASCUCCI AND S. POLIDORO, *Pointwise estimates for a class of non-homogeneous Kolmogorov equations*, Mathematische Annalen, **340** (2008), 237–264;
4. C. CINTI, *Sub-solutions and mean-value operators for ultraparabolic equations on Lie groups*, Math. Scand., **101** (2007), 83–103;
5. C. CINTI AND S. POLIDORO, *Pointwise local estimates and Gaussian upper bounds for a class of uniformly subelliptic ultraparabolic operators*, J. Math. Anal. Appl., **338** (2008), 946–969;
6. C. CINTI AND E. LANCONELLI, *Riesz and Poisson-Jensen representation formulas for a class of ultraparabolic operators on Lie Groups*, Potential Analysis, **30** (2009), 179–200;
7. C. CINTI, *Uniqueness in the Cauchy problem for a class of hypoelliptic ultraparabolic operators*, Rend. Lincei Mat. Appl., **20** (2009), 145–158;
8. C. CINTI AND S. POLIDORO, *Harnack inequalities and lifting procedure for evolution hypoelliptic equations*, Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica, **7** (2008), 93–105;
9. C. CINTI AND S. POLIDORO, *Bounds on short cylinders and uniqueness in Cauchy problem for degenerate Kolmogorov equation*, J. Math. Anal. Appl., **359** (2009), 135–145;
10. C. CINTI, K. NYSTRÖM AND S. POLIDORO, *A note on Harnack inequalities and propagation sets for a class of hypoelliptic operators*, Potential Analysis **33** (2010), 341–354;
11. C. CINTI, K. NYSTRÖM AND S. POLIDORO, *A boundary estimate for non-negative solutions to Kolmogorov operators in non-divergence form*, to appear in Annali di Matematica Pura ed Applicata;
12. C. CINTI, K. NYSTRÖM AND S. POLIDORO, *A Carleson-type estimate in Lipschitz type domains for non-negative solutions to Kolmogorov operators*, to appear in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.

Lavori sottoposti per la pubblicazione - lavori in preparazione:

13. C. CINTI, S. MENOZZI AND S. POLIDORO, *Two-sided bounds for degenerate processes with densities supported in subsets of \mathbb{R}^N* , in preparation.

Seminari interni:

- (i) *Formule di rappresentazione per le soprassoluzioni di equazioni ultraparaboliche su gruppi di Lie*, Seminario di Analisi Matematica “Bruno Pini”, Dip. Mat. Univ. Bologna (A.A. 2006-2007), 15–29, Tecnoprint, Bologna, 2008;

- (ii) *Risultati di unicità per una classe di operatori di Kolmogorov degeneri*, Seminario di Analisi Matematica “Bruno Pini”, Dip. Mat. Univ. Bologna (A.A. 2007-2008), Tecno-print, Bologna, 2009.

Altre pubblicazioni:

- C. CINTI, *Sui sub-Laplaciani reali e su una classe di operatori ultraparabolici sui gruppi di Lie stratificati*, Bollettino U.M.I., La Matematica nella Società e nella cultura, Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 235–237.

Breve descrizione delle pubblicazioni

Nelle note [1] e [2] trattiamo argomenti di Teoria del Potenziale per i sub-Laplaciani reali in \mathbb{R}^N . Si scrivono nella forma seguente $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2$, ove X_j , $j = 1, \dots, m$, è un operatore differenziale del primo ordine su \mathbb{R}^N a coefficienti C^∞ , invariante per le traslazioni a sinistra ed omogeneo di grado uno rispetto alle dilatazioni di un gruppo di Lie omogeneo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$. Inoltre l'algebra di Lie generata dagli X_j ha rango massimo in ogni punto. Di conseguenza, per un noto Teorema di Hörmander, \mathcal{L} è ipoellittico, e possiede una soluzione fondamentale globale di classe C^∞ nel complementare della diagonale.

In [1] proviamo la seguente formula di tipo Poisson-Jensen

$$u(x) = \int_{\partial_1\Omega} u(y) d\mu_x^\Omega(y) - \int_{\partial_2\Omega \cup \Omega} g_\Omega(x, y) d\mu_u(y), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

ove u è \mathcal{L} -subarmonica su un intorno della chiusura dell'arbitrario aperto connesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, μ_u è la misura di Riesz relativa a u , μ_x^Ω è la misura \mathcal{L} -armonica per Ω in x , g_Ω è la funzione di Green per Ω . Infine $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$ denotano rispettivamente i sottoinsiemi di $\partial\Omega$ dei punti regolari e irregolari per il problema di Dirichlet relativo a \mathcal{L} . Questo risultato completa la precedente formula dimostrata da Bonfiglioli e Lanconelli in [BLU], nell'ipotesi più restrittiva che Ω sia un aperto \mathcal{L} -regolare (quindi $\partial_1\Omega = \partial\Omega$, $\partial_2\Omega = \emptyset$). L'estensione di (1) ad un arbitrario aperto limitato e connesso Ω richiede lo studio della capacità e degli insiemi polari rispetto a \mathcal{L} .

In [2] forniamo un'adeguata teoria dell'energia $\iint \Gamma(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$, ove μ è una misura di Radon e Γ è la soluzione fondamentale di \mathcal{L} . Come applicazione, proviamo la seguente proprietà di Quasi-Continuità: ogni funzione \mathcal{L} -superarmonica è continua se ristretta al complementare di un aperto di \mathcal{L} -capacità arbitrariamente piccola. Il nostro approccio si basa sulle proprietà della soluzione fondamentale Γ : strumento fondamentale sono infatti i potenziali di misure legate in modo naturale agli operatori integrali di media \mathcal{M}_r e M_r sugli insiemi di livello di Γ . Un risultato cruciale è esprimere la \mathcal{L} -capacità $\mathcal{C}(K)$ di un compatto K in termini di \mathcal{L} -energia in questo modo:

$$\mathcal{C}(K) = \max \left\{ \iint \Gamma(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \mid \int \Gamma(\cdot, y) d\mu(y) \leq 1, \text{supp } \mu \subseteq K \right\}.$$

In [3] consideriamo una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck con coefficienti misurabili della forma

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} \partial_{x_i} (a_{ij}(z) \partial_{x_j} u) + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = 0, \quad (2)$$

ove $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, $1 \leq m_0 \leq N$. La matrice $(a_{ij}(z))_{i,j=1,\dots,m_0}$ è simmetrica, uniformemente definita positiva e i suoi coefficienti sono funzioni misurabili e a valori reali. Inoltre supponiamo che

$(b_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ abbia una particolare forma a blocchi per cui $\sum_{j=1}^{m_0} \partial_{x_j}^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t$ sia ipoellittico, ma non omogeneo rispetto ad alcun gruppo di dilatazioni. Proviamo che le soluzioni deboli di (2) sono funzioni localmente limitate: se $u \geq 0$ è una soluzione debole di (2) in Ω , e $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, $\varrho \in [\frac{r}{2}, r[$ sono tali che il cilindro $\overline{R_r(z_0)}$ è contenuto in Ω , esiste una costante $c > 0$ che dipende solo dall'operatore (2) tale che, per ogni $p > 0$,

$$\sup_{R_\varrho(z_0)} u^p \leq \frac{c}{(r-\varrho)^Q} \int_{R_r(z_0)} u^p. \quad (3)$$

Questa stima vale anche per ogni $p < 0$ tale che $u^p \in L^1(R_r(z_0))$. Il metodo estende la procedura iterativa di Moser, ed è stato usato in [PP2] nel caso in cui gli operatori verifichino una ulteriore ipotesi di omogeneità. Ora rimuoviamo tale ipotesi provando alcune stime del potenziale e disuguaglianze di tipo Sobolev per le soluzioni.

I lavori [4], [6], [7] e [10] riguardano operatori ultraparabolici ipoellittici in \mathbb{R}^{N+1} della forma $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0 - \partial_t$, ove X_j , $j = 0, 1, \dots, m$, è un operatore differenziale del primo ordine su \mathbb{R}^N a coefficienti C^∞ . Esiste un gruppo di Lie omogeneo $\mathbb{L} = (\mathbb{R}^{N+1}, \circ, d_\lambda)$ tale che \mathcal{L} sia invariante per le traslazioni a sinistra e d_λ -omogeneo di grado due. Supponiamo poi la connettività orientata dei punti di \mathbb{R}^{N+1} per mezzo di curve \mathcal{L} -ammissibili, ossia curve $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ assolutamente continue e tali che

$$\gamma'(s) = \sum_{j=1}^m \omega_j(s) X_j(\gamma(s)) + \lambda(s) Y(\gamma(s)), \quad \text{per q.o. } s \in [0, T], \quad (4)$$

con $\omega_1, \dots, \omega_m, \lambda$ funzioni reali costanti a tratti, $\lambda \geq 0$. Da queste ipotesi segue che l'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_m, X_0 - \partial_t$ ha rango massimo in ogni punto e quindi \mathcal{L} è ipoellittico. Questi operatori sono stati introdotti da Kogoj e Lanconelli in [KL].

In [4] sviluppiamo per questi operatori una Teoria del Potenziale analoga a quella per i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot (si veda [BLU]). Caratterizziamo funzioni \mathcal{L} -armoniche e \mathcal{L} -subarmoniche usando i seguenti operatori di media superficiale e solida:

$$\mathcal{M}_r(u)(z) = \int_{\partial\Omega_r(z)} \mathcal{H}(\zeta) u(z \circ \zeta) d\sigma(\zeta), \quad M_r(u)(z) = \frac{1}{r^{Q-2}} \int_{\Omega_r(z)} K(\zeta^{-1} \circ z) u(\zeta) d\zeta,$$

ove $\Omega_r(z)$ è un insieme di livello della soluzione fondamentale Γ di \mathcal{L} . Poi, procedendo come in Theorem 1.6 di [LP], otteniamo la seguente formula di tipo Poisson-Jensen

$$u(z) = M_r(u)(z) - \frac{Q-2}{r^{Q-2}} \int_0^r l^{Q-3} \left(\int_{\Omega_l(z)} \left(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - \frac{1}{l^{Q-2}} \right) d\mu(\zeta) \right) dl, \quad (5)$$

ove u è \mathcal{L} -subarmonica sull'aperto Ω , μ è la misura di Riesz associata a u , $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$. Stabiliamo poi un criterio per determinare tutte e sole le misure di Radon μ in \mathbb{R}^{N+1} che possono essere misure di Riesz associate a qualche funzione \mathcal{L} -subarmonica su tutto lo spazio e limitata superiormente. La condizione su μ è la seguente:

$$\int_1^\infty \frac{\mu(\Omega_t(z))}{t^{Q-1}} dt < \infty$$

per ogni z in un sottoinsieme denso di \mathbb{R}^{N+1} . In tal caso esiste h \mathcal{L} -armonica in \mathbb{R}^{N+1} , $h \leq 0$, tale che

$$u(z) = U - \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) d\mu(\zeta) + h(z), \quad z \in \mathbb{R}^{N+1},$$

ove $U = \sup_{\mathbb{R}^{N+1}} u < \infty$. Si tratta di una formula di rappresentazione di Riesz globale che è una generalizzazione del risultato di Pini in [P]. Vengono estesi alcuni risultati di Watson per l'operatore del calore.

In [6] proviamo teoremi di rappresentazione di Riesz per funzioni \mathcal{L} -superarmoniche su un aperto arbitrario $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$. Questi teoremi si scrivono in termini del potenziale di Green $\int_{\Omega} G_{\Omega}(\cdot, \zeta) d\mu(\zeta)$ di una misura di Radon μ , e richiedono una preliminare analisi delle funzioni di Green G_{Ω} per aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$. Le prove si basano sull'uso di appropriate tecniche di Teoria del Potenziale. In particolare, se u è \mathcal{L} -superarmonica su Ω con misura di Riesz associata μ , vale

$$u = \int_{\Omega} G_{\Omega}(\cdot, \zeta) d\mu(\zeta) + h \quad \text{in } \Omega$$

con h massimo minorante \mathcal{L} -armonico di u se e solo se il potenziale di Green di μ è finito in un insieme denso in Ω (o, equivalentemente, è una funzione \mathcal{L} -superarmonica).

Otteniamo poi la seguente formula di tipo Poisson-Jensen:

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} u(\zeta) d\mu_z^{\Omega}(\zeta) + \int_{\Omega} G_{\Omega}(z, \zeta) d\mu(\zeta), \quad z \in \Omega, \quad (6)$$

ove u è \mathcal{L} -superarmonica su un intorno della chiusura dell'aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, μ è la misura di Riesz relativa a u , e μ_z^{Ω} è la misura \mathcal{L} -armonica per Ω in z . Si mostra che (6) nel caso particolare di $\Omega = \Omega_r(z)$ è riconducibile a (5). Inoltre, formule analoghe alla (6) per i sub-Laplaciani reali sono state provate in [BLU] e in [1]. Riusciamo ad avere (6) per un aperto limitato Ω arbitrario supponendo la continuità di $u|_{\partial\Omega}$, mentre se manteniamo l'arbitrarietà di u è necessaria l'ipotesi che ogni punto di $\partial\Omega$ sia regolare per \mathcal{L}^* .

In [7] otteniamo il seguente risultato di unicità per il problema di Cauchy relativo a \mathcal{L} : se u, v sono soluzioni di $\mathcal{L}u = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0, T[$ e $u(\cdot, 0) = \varphi \in C(\mathbb{R}^N)$, allora una qualunque delle seguenti condizioni: $|u(x, t) - v(x, t)|$ si maggiora con una funzione del tipo $\exp(c|x|_{\mathbb{R}^N}^2)$, oppure u e v sono entrambe non negative, implica $u \equiv v$. Nella prova usiamo una tecnica che si basa su stime puntuali della soluzione fondamentale Γ di \mathcal{L} .

In [10] ci occupiamo di disuguaglianze di Harnack per le soluzioni non negative di $\mathcal{L}u = 0$ su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$. In particolare, sia $(x_0, t_0) \in \Omega$ e poniamo

$$\mathcal{A}_{(x_0, t_0)} = \{(x, t) \in \Omega \mid \text{esiste una curva } \mathcal{L}\text{-ammissibile } \gamma : [0, T] \rightarrow \Omega \\ \text{tale che } \gamma(0) = (x_0, t_0), \gamma(T) = (x, t)\}.$$

Il nostro risultato principale è il seguente: per ogni compatto $K \subseteq \text{int}(\mathcal{A}_{(x_0, t_0)})$ esiste una costante positiva C_K che dipende solo da Ω , (x_0, t_0) , K e dall'operatore \mathcal{L} , tale che la disuguaglianza di Harnack

$$\sup_K u \leq C_K u(x_0, t_0) \quad (7)$$

vale per ogni soluzione $u \geq 0$ di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω . Ricordiamo che $\mathcal{A}_{(x_0, t_0)}$ è legato al seguente principio del minimo di Bony [B]: se u raggiunge il suo minimo valore in $(x_0, t_0) \in \Omega$, allora questo minimo è raggiunto in ogni punto di $\mathcal{A}_{(x_0, t_0)}$.

Confrontiamo poi questo risultato con una disuguaglianza di Harnack astratta legata alla Teoria del Potenziale, che si enuncia esattamente come (7) sostituendo $\mathcal{A}_{(x_0, t_0)}$ con il più piccolo "insieme assorbente" $\Omega_{(x_0, t_0)}$.

In [5] consideriamo una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ultraparabolico in \mathbb{R}^{N+1} della forma

$$\mathcal{L}_A u := \sum_{j=1}^m X_j (AXu)_j + X_0 u - \partial_t u = 0. \quad (8)$$

Qui $1 \leq m \leq N$, e $A = (a_{i,j}(z))_{i,j=1,\dots,m}$ è una matrice simmetrica e uniformemente definita positiva i cui coefficienti sono funzioni misurabili a valori reali. Se A coincide con la matrice identità, si ottengono gli operatori \mathcal{L} in [4].

Come in [PP2, 3], adattiamo la procedura iterativa di Moser alla geometria non euclidea dei gruppi di Lie con lo scopo di provare una stima in L_{loc}^∞ per le soluzioni deboli di (8) in termini della loro norma L_{loc}^p . Questa stima è analoga a (3).

Nella seconda parte di [5] proviamo l'esistenza di una soluzione fondamentale Γ_A di \mathcal{L}_A sotto l'ipotesi che gli $a_{i,j}$ siano C^∞ , e una stima Gaussiana dall'alto di Γ_A . È notevole il fatto che questa stima dall'alto si basa su alcune proprietà standard della soluzione fondamentale e sulla stima di tipo Moser analoga a (3), quindi non dipende dalla regolarità degli $a_{i,j}$.

La stima di Γ_A è espressa in termini della funzione valore V di un problema di controllo ottimo relativo ai campi vettoriali X_1, \dots, X_m e $Y = X_0 - \partial_t$. In particolare, sia $\gamma((x, t), (y, s), \omega)$ una curva (che chiameremo ancora \mathcal{L} -ammissibile) che soddisfa una versione leggermente modificata di (4) in cui $\lambda \equiv 1$ e $\omega_1, \dots, \omega_m \in L^\infty([0, T])$, e connette i punti $(x, t), (y, s) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $t > s$ (ossia $\gamma(0) = (x, t)$, $\gamma(T) = (y, s)$; poichè $\lambda \equiv 1$, si ha $T = t - s$). Considerando $\omega_1, \dots, \omega_m$ come il controllo di γ , e l'integrale $\Phi(\omega) = \int_0^{t-s} (\omega_1^2(\tau) + \dots + \omega_m^2(\tau)) d\tau$ come il suo costo, allora la funzione valore V è data da

$$V(x, t, y, s) = \inf \{ \Phi(\omega) \mid \gamma((x, t), (y, s), \omega) \}.$$

Il nostro risultato è il seguente. Se V è localmente Lipschitziana, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ che dipende solo da \mathcal{L}_A e da ε tale che

$$\Gamma_A(x, t, 0, 0) \leq \frac{C_\varepsilon}{t^{\frac{Q-2}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{32\mu} V((0, \varepsilon t) \circ (x, t) \circ (0, \varepsilon t), 0, 0) \right), \quad (9)$$

per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$. Per provare (9) adattiamo una tecnica introdotta da Aronson nello studio di equazioni uniformemente paraboliche, e usata da Pascucci e Polidoro in [PP1] per operatori di Kolmogorov. Un punto cruciale è che, per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, V è soluzione viscosa della seguente equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman

$$YV(x, t, \cdot, \cdot) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m (X_j V(x, t, \cdot, \cdot))^2 = 0, \quad (y, s) \in \mathbb{R}^N \times]-\infty, t[. \quad (10)$$

Si può omettere l'ipotesi V localmente Lipschitziana utilizzando un risultato di regolarità di Cannarsa e Rifford [CR], che permette di considerare V come soluzione in senso forte di (10).

I lavori [9], [11] e [12] riguardano una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo Kolmogorov in forma di non-divergenza

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(z) \partial_{x_i x_j} u + \sum_{j=1}^m a_j(z) \partial_{x_j} u + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = 0, \quad (11)$$

ove $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, $1 \leq m \leq N$. La matrice $(a_{ij}(z))$ è simmetrica, uniformemente definita positiva e i suoi coefficienti sono funzioni limitate e Hölderiane rispetto alla norma del gruppo di Lie omogeneo associato. Inoltre, la forma di (b_{ij}) garantisce l'ipoellitticità di $\sum_{j=1}^m \partial_{x_j}^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t$.

In [9] consideriamo il problema di Cauchy relativo a (11) e quello relativo alla corrispondente equazione in forma di divergenza

$$\sum_{i,j=1}^m \partial_{x_i} (a_{ij}(z) \partial_{x_j} u) + \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = 0,$$

con $z \in \mathbb{R}^N \times]0, T[$. Proviamo che, se per $a, M > 0$ e $\beta \in]0, 1[$ vale

$$|u(x, t)| \leq M \exp(a(t^{-\beta} + |x|^2)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, T[,$$

e $u(\cdot, 0) \equiv 0$, allora $u \equiv 0$. La prova si basa su alcuni precedenti risultati di unicità e sulle cosiddette “stime di u su cilindri corti”, introdotte per la prima volta da Safonov nello studio di operatori uniformemente parabolici.

In [11] diamo condizioni geometriche sufficienti per la validità della seguente disuguaglianza di tipo Carleson [C]. Sia \tilde{z} un punto dell’aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, sia K un sottoinsieme compatto di $\bar{\Omega}$, e sia $\Sigma \subset \partial\Omega$ tale che $K \cap \partial\Omega \subset \Sigma$. Esiste una costante positiva C_K , che dipende solo da $\Omega, \Sigma, K, \tilde{z}$ e dall’operatore in (11), tale che

$$\sup_K u \leq C_K u(\tilde{z}),$$

per ogni soluzione non negativa u di (11) in Ω tale che $u|_{\Sigma} = 0$. Seguiamo l’approccio di Salsa [S], che prova un risultato analogo per le soluzioni deboli non negative di equazioni paraboliche a coefficienti misurabili in un cilindro Lipschitziano di \mathbb{R}^{N+1} .

In [12] mostriamo che un’ampia classe di domini di tipo Lipschitz verifica condizioni geometriche sufficienti per una disuguaglianza di tipo Carleson analoga a quella in [11], ma invariante per riscaldamento. In particolare, se $\Sigma \subset \partial\Omega$ è una superficie Lipschitziana rispetto alla geometria dell’operatore, allora esistono due costanti positive C, c , che dipendono solo dalla costante di Lipschitz e dall’operatore, tali che

$$\sup_{Q_{M,c,r}(x_0,t_0) \cap \Omega} u(x, t) \leq C u(A_r^+(x_0, t_0)), \quad A_r^+(x_0, t_0) = (x_0, t_0) \circ \delta_r(\tilde{x}, \tilde{t}),$$

per ogni $(x_0, t_0) \in \Sigma$, per ogni soluzione non negativa u di (11) in Ω che si annulla con continuità su $Q_{M,r}(x_0, t_0) \cap \partial\Omega$, e per ogni r abbastanza piccolo. Qui $Q_{M,r}(x_0, t_0)$ è un opportuno intorno cilindrico di (x_0, t_0) , e il punto $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ è fissato.

In [8] consideriamo una classe di equazioni alle derivate parziali ipoellittiche del tipo

$$\mathcal{H}u = \partial_{x_1}^2 u + x_1^k \partial_{x_2} u - \partial_t u = 0,$$

ove $k \in \mathbb{N}$ è fissato, e proviamo una disuguaglianza di Harnack invariante per le sue soluzioni positive, esprimendola in termini delle curve integrali dei campi $X_1 = \partial_{x_1}$ e $Y = x_1^k \partial_{x_2} - \partial_t$. La novità del nostro risultato è che, per $k > 1$, non può esistere alcun gruppo di Lie in \mathbb{R}^3 tale che i campi X_1 e Y siano invarianti per le traslazioni a sinistra. Come applicazione proviamo una stima dal basso per la soluzione fondamentale di \mathcal{H} . La tecnica usata si basa su una procedura di “lifting” di \mathcal{H} per mezzo dell’aggiunta di variabili e campi vettoriali, con lo scopo di ottenere un nuovo operatore ipoellittico $\tilde{\mathcal{H}}$ che sia omogeneo e invariante per le traslazioni a sinistra di un opportuno gruppo di Lie in \mathbb{R}^{3+K} . È infatti noto (cfr. [KL] e [BP]) che per le soluzioni positive di $\tilde{\mathcal{H}}u = 0$ vale una disuguaglianza di Harnack del tipo da noi cercato.

Infine in [13] stiamo estendendo i risultati del lavoro [8] ad operatori più generali e stiamo dimostrando anche stime dall’alto con metodi probabilistici basati sul calcolo di Malliavin.

REFERENCES

- [BLU] A. BONFIGLIOLI, E. LANCONELLI AND F. UGUZZONI, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, Springer-Verlag, Berlin, 2007;

- [B] J.M. BONY, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, **19** (1969), 277–304;
- [BP] U. BOSCAIN AND S. POLIDORO, *Gaussian estimates for hypoelliptic operators via optimal control*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **18** (2007), 333–342;
- [C] L. CARLESON, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat. **4** (1962), 393–399;
- [CR] P. CANNARSA AND L. RIFFORD, *Semiconcavity results for optimal control problems admitting no singular minimizing controls*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), 773–802;
- [KL] A. KOGOJ AND E. LANCONELLI, *An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Mediterr. J. Math., **1** (2004), 51–80;
- [LP] E. LANCONELLI AND A. PASCUCCI, *Superparabolic functions related to second order hypoelliptic operators*, Pot. Anal., **11** (1999), 303–323;
- [P] B. PINI, *Estensione al caso parabolico di un teorema di F. Riesz relativo alle funzioni subarmoniche*, Riv. Mat. Univ. Parma, **5** (1954), 269–280;
- [PP1] A. PASCUCCI AND S. POLIDORO, *A Gaussian upper bound for the fundamental solutions of a class of ultraparabolic equations*, J. Math. Anal. Appl., **282** (2003), 396–409;
- [PP2] A. PASCUCCI AND S. POLIDORO, *The Moser’s iterative method for a class of ultraparabolic equations*, Comm. Cont. Math., **6** (2004), 395–417;
- [S] S. SALSA, *Some properties of nonnegative solutions of parabolic differential operators*, Ann. Mat. Pure Appl., **128** (1981), 193–206.

Talks e seminari

- *Formule di rappresentazione per le soprassoluzioni di equazioni ultraparaboliche su gruppi di Lie*, Seminario di Analisi Matematica “Bruno Pini”, 1 febbraio 2007, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna;
- *Risultati di unicITÀ per una classe di operatori di Kolmogorov degeneri*, Seminario di Analisi Matematica “Bruno Pini”, 21 febbraio 2008, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna;
- *Unicità nel problema di Cauchy per una classe di operatori ultraparabolici ipoellittici*, 19 febbraio 2009, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata “G. Vitali”, Università di Modena e Reggio Emilia;
- *Uniqueness results in the Cauchy problem for degenerate Kolmogorov equations*, 25 marzo 2009, “Institutionen för matematik och matematisk statistik”, Umeå universitet, Sweden;
- *Uniqueness of the solution in the Cauchy problem for degenerate Kolmogorov equations*, International Conference of sub-Riemannian Geometry and Vision, 31 agosto-4 settembre 2009, Bologna; sessione poster;

- *Teoria astratta del potenziale ed applicazioni alle equazioni alle derivate parziali degenere*, seminario specialistico del ciclo “Topics in Mathematics I & II” nell’ambito delle attività didattiche per il Dottorato di Ricerca in Matematica; 22 marzo 2010, Bologna.

Partecipazione a convegni e scuole

- *Ciclo di Conferenze in memoria di Gianfranco Cimmino*, Bologna, marzo-maggio 2004;
- *Miniworkshop on Subriemannian Geometry and PDE’s*, Bologna, 26 novembre 2004;
- *Equazioni non lineari sub-ellittiche di origine variazionale nella geometria di contatto*, Bologna, 4-5 aprile 2005;
- *Meeting on Subelliptic PDE’s and Applications to Geometry and Finance*, Cortona, 12-17 giugno 2006;
- *Liouville Theorems in Riemannian and Sub-Riemannian Settings*, Bologna, 23-24 novembre 2006;
- *Equazioni di Kolmogorov e misure invarianti*, Bologna, 12-13 aprile 2007;
- *Geometric Methods in PDE’s: a conference in occasion of the 65th birthday of Ermanno Lanconelli*, Bologna, 27-30 maggio 2008;
- *International Conference of sub-Riemannian Geometry and Vision*, Bologna, 31 agosto-4 settembre 2009;
- *Giornata di lavoro in ricordo di Bruno Pini*, Bologna, 27 novembre 2009;
- *Kolmogorov Equations in Physics and Finance*, Modena, 8-10 settembre 2010;
- *Viscosity, metric, and control theoretic methods for nonlinear PDE*, Padova, 23-24 settembre 2010.

Curriculum attività didattica

Ho svolto **attività di supporto alla didattica** (esercitazioni connesse agli insegnamenti ufficiali, servizio di assistenza durante gli appelli d’esame, attività di aiuto generale allo studio) per i seguenti insegnamenti:

- presso la facoltà di Ingegneria dell’Università di Bologna:

- A.A. 2001-2002** Analisi Matematica L-B (docente prof. G. Dore) per il corso di laurea in Ingegneria Gestionale (L-Z) (+ Ingegneria dei Processi Gestionali (L-Z)), gennaio-marzo 2002;
- A.A. 2002-2003** Analisi Matematica L-A (docente prof. F. Ancona) per il corso di laurea in Ingegneria Informatica (G-Z), settembre-dicembre 2002;
Analisi Matematica L-A (docente prof. F. Ancona) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica, settembre-dicembre 2002;
- A.A. 2003-2004** Analisi Matematica L-A (docente prof. F. Ancona) per il corso di laurea in Ingegneria Informatica (G-Z), settembre-dicembre 2003;
Analisi Matematica L-A (docente prof. F. Ancona) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica, settembre-dicembre 2003;

- A.A. 2004-2005** Corso di accoglienza matricole, settembre 2004;
 Analisi Matematica L-A (docente prof. S. Matarasso) per il corso di laurea in Ingegneria Informatica (A-K) (+ Ingegneria Elettrica), settembre-dicembre 2004;
 Analisi Matematica L-A (docente prof. F. Ancona) per il corso di laurea in Ingegneria Informatica (L-Z)(+ Ingegneria Energetica), settembre-dicembre 2004;
- A.A. 2005-2006** Corso di accoglienza matricole, settembre 2005;
 Analisi Matematica 1 (docente prof. ssa S. Abenda) per il corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura, settembre-dicembre 2005;
 Analisi Matematica 2 (docente prof. ssa S. Abenda) per il corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura, settembre-dicembre 2005;
- A.A. 2006-2007** Corso di accoglienza matricole, settembre 2006;
 Analisi Matematica L-A (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Meccanica, settembre-dicembre 2006;
 Analisi Matematica L-C (= analisi complessa, trasformate di Laplace, serie e trasformate di Fourier) (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica (+ Ingegneria delle Telecomunicazioni), settembre-dicembre 2006;
- A.A. 2007-2008** Analisi Matematica L-A (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Meccanica, settembre-dicembre 2007;
- A.A. 2008-2009** Analisi Matematica T-1 (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni, settembre-dicembre 2008;
 Analisi Matematica L-C (= analisi complessa, trasformate di Laplace, serie e trasformate di Fourier) (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica (+ Ingegneria delle Telecomunicazioni), settembre-dicembre 2008;
- A.A. 2009-2010** Analisi Matematica T-1 (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Chimica e Biochimica (+ Ingegneria Elettrica, Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni), settembre-dicembre 2009;
 Analisi Matematica T-A (docente prof. ssa G. Citti) per il corso di laurea in Ingegneria Energetica, settembre-dicembre 2009;
- A.A. 2010-2011** Analisi Matematica T-1 (docente prof. E. Obrecht) per il corso di laurea in Ingegneria Chimica e Biochimica (+ Ingegneria Elettrica, Ingegneria Elettronica e Telecomunicazioni), settembre-dicembre 2010;
 Analisi Matematica T-A (docente prof. ssa S. Abenda) per il corso di laurea in Ingegneria Gestionale, settembre-dicembre 2010;
- presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Modena e Reggio Emilia:
- A.A. 2009-2010** Analisi Matematica I (docente prof. V. Zanelli) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni (+ Ingegneria Informatica), settembre-dicembre 2009;
- A.A. 2010-2011** Corsi Introduttivi di Matematica, settembre 2010;
 Analisi Matematica I (docente prof. V. Zanelli) per il corso di laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni (+ Ingegneria Informatica), settembre-dicembre 2010;
 Analisi Matematica A (docente prof. S. Polidoro) per il corso di laurea in Matematica, Fisica, Informatica, settembre-dicembre 2010.

Nell'**A.A. 2007-2008** sono stata **docente** del corso di Attività Professionalizzanti (Introduzione al \LaTeX) da 3 CFU per il corso di laurea triennale in Matematica, facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali (marzo-maggio 2008).

Nell'**A.A. 2009-2010** sono stata **docente** del corso di Analisi Matematica II - IEI (II modulo) da 6 CFU presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Modena e Reggio Emilia, Accademia Militare (febbraio-aprile 2010).

Nell'**A.A. 2010-2011** sono stata **docente** del corso di Analisi Matematica II - IEI da 12 CFU presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Modena e Reggio Emilia, Accademia Militare (febbraio-giugno 2010).

Bologna,

(Dott.ssa Chiara Cinti)