Prova di Autovalutazione

NOME e COGNOME: MATRICOLA:

Scrivere le risposte ad ogni esercizio nello spazio che lo segue immediatamente

1. Sia $(a_n)_n$ una successione reale. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa:

$$\text{Se } (a_n)_n \text{ è superiormente illimitata, allora } a_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty.$$

Valutazione 2 pti (1 per riconoscere se Vero/Falso, 1 per la motivazione)

Falso controesempio: $a_n = (-1)^n n$ - La succ. è superiormente illimitata, ma non ha limite, perché la succ dei pari tende a $+\infty$, quella dei disp. a $-\infty$.

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(2x)) + 2x^2}{(e^x+1)^4(\sin(x))^3},$$

Valutazione 5 punti (3 per il numeratore, 2 per il denominatore)

Considero il numeratore:

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(\cos(2x)) = \log\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) =$$
$$= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2$$

osserviamo che

$$o\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 = o(x^4)$$

$$\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 = 4x^4\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)^2 = 4x^4 + o(x^4)$$

quindi sostituendo

$$\log(\cos(2x)) + 2x^2 = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - 2x^4 + 2x^2 = -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

Considero il denominatore:

$$(e^x+1)^4 = 2^4 + o(1)$$
$$(\sin(x))^3 = (x + o(x))^3$$

Pertanto il limite si calcola come segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{(2^4 + o(1))(x + o(x))^3} = 0$$

eventualmente usando alcuni degli sviluppi sottoindicati per $x \to 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \quad \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{15} + o(x^5), \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x+2|}}{x},$$

determinare:

- pti 2 • il dominio di f e quello di f';
- pti 3 • le proprietá di monotonia di f;
- pti 1 • quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -1$;
- pti 2 • gli intervalli di convessità e concavità di f.

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{-2\}\ \exists\ f'(x) = \frac{e^{|x+2|}}{x^2}\left(\text{segn}(x+2)\,x - 1\right)$

$\exists \lim_{x \to -2^-} f'(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f'(x) \Rightarrow -2 \notin \mathcal{D}(f')$

$\Rightarrow \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

Per lo studio della monotonia studiamo il segno di f'

se $x > -2$ $\quad f'(x) = \frac{e^{|x+2|}}{x^2}(x-1)$

$x < -2$ $\quad f'(x) = \frac{e^{|x+2|}}{x^2}(-x-1)$

f è monotona crescente sugli intervalli $]-\infty, -2]$ e su $[1, +\infty[$

~~è monotona decrescente~~ $f(-2) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = e^3 \Rightarrow$

f è crescente sull'unione $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

f è monotona decrescente su $[-2, 0[$ e su $]0, 1]$, ma

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ non decresce sull'unione

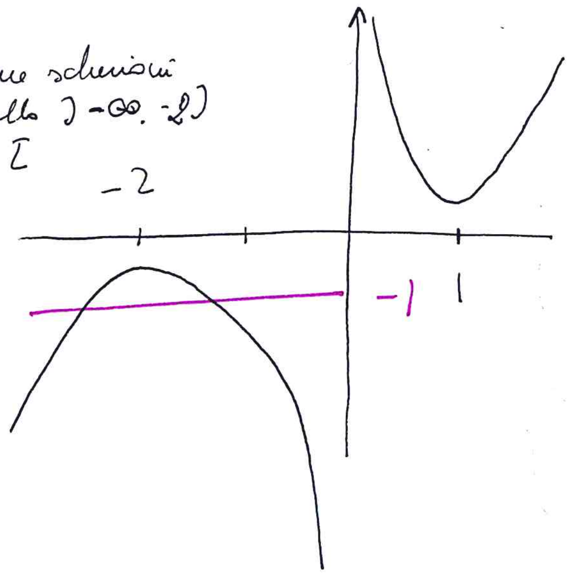
$f(]-\infty, -2]) =]-\infty, -\frac{1}{2}]$

$f([-2, 0[) =]-\infty, -\frac{1}{2}]$

$f(]0, 1]) = [e^3, +\infty[$

$f([1, +\infty[) = [e^3, +\infty[$

$\Rightarrow$ $f(x) = -1$ ha due soluzioni
uno nell'intervallo $]-\infty, -2]$
uno in $[-2, 0[$



Calcolo f'': $\forall x \in \mathcal{D}(f')\ \exists\ f''(x) =$

$= \frac{e^{|x+2|}}{x^3}\left((x - \text{segn}(x+2))^2 + 1\right)$

$f'' \geq 0$ se $x > 0$, $\quad f'' \leq 0$ se $x < 0$

f è convessa in $]0, +\infty[$, concava su $]-\infty, 0[$