23 luglio 2012 - ingegneria energetica/gestionale - Proff. Citti - Baldi - prova totale

NOME e COGNOME:.. **MATRICOLA**: . . . .

Rispondere UNICAMENTE su questo foglio

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni **motivando brevemente la risposta**.

(1) [2pti] [V] [F] Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente ad $a > 0$. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq N$.

Vero. Per il teorema della permanenza del segno.

(2) [1,5pti] [V] [F] Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ se $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 1$ se $x \in]0, 2]$. Allora esiste $x \in [-1, 2]$ tale che $f(x) = 0$.

Vero. Per il teorema dei valori intermedi. Infatti la funzione f è continua perché per ogni $y \in [-1, 2]$, $\exists \lim_{x\to y} f(x) = f(y)$, inoltre $[-1, 2]$ è un intervallo chiuso e limitato.

Svolgere gli esercizi seguenti riportando i passaggi principali.

(1) [3,5 pti] Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \dfrac{\arctan(\log(3x + 1)) - e^{2x}}{x^3 + 1}$ nel punto $x = 0$.

$$\exists f'(0) = \left.\frac{\left(3 \cdot \dfrac{1}{(\log(3x+1))^2+1}\left(\dfrac{1}{3x+1}\right) - 2e^{2x}\right)(x^3+1) - \left(\arctan(\log(3x+1) - e^{2x}\right)(3x^2)}{(x^3+1)^2}\right|_{x=0} = 3 - 2 = 1.$$

(2) [3,5 pti] Calcolare il seguente integrale $\int_0^1 2x \arctan x dx$.

Integriamo per parti come segue:

$$\int_0^1 2x \arctan x dx = \left[x^2 \arctan(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1 + [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(3) [7 pti] Data la funzione

$$f(x) = |x - 1|e^{-x},$$

determinare il dominio di f, l'insieme in cui essa e' derivabile, gli intervalli di monotonia e stabilire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1$. Disegnare il grafico qualitativo di f (senza tenere conto di convessita' e concavita').

$D(f) = \mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, esiste

$$f'(x) = sign(x-1)e^{-x} - |x-1|e^{-x} = sign(x-1)e^{-x} - sign(x-1)(x-1)e^{-x} = sign(x-1)e^{-x}(2-x).$$

Poiché $\lim_{x\to1^+} f'(x) = e^{-1} \neq \lim_{x\to1^-} f'(x) = -e^{-1}$, allora, per il teorema sul limite della funzione derivata, f non è derivabile in 1 e quindi $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Studiamo ora il segno di f' per la monotonia di f: $sign(f'(x)) = sign(sign(x-1)e^{-x}(2-x)) = sign(x-1)sign(2-x)$, poiché e^{-x} è sempre positiva. D'altra parte $sign(x-1) = 1 \Leftrightarrow x > 1$ e $sign(2-x) = 1 \Leftrightarrow x < 2$. Così $sign(f'(x)) = 1$ se $x \in]1, 2[$ e $sign(f'(x)) = -1$ se $x \in]-\infty, 1[$ oppure $x \in]2, +\infty[$. Applicando il teorema test di monotonia, concludiamo che f è crescente in [1,2] e decrescente in $]-\infty, 1]$ e $[2, +\infty[$.

Stabiliamo il numero di soluzioni di $f(x) = 1$ come segue.

- Poiché f è continua sull'intervallo $]-\infty, 1]$, per il teorema dei valori intermedi $f(]-\infty, 1])$ è un intervallo. D'altra parte f è decrescente in $]-\infty, 1]$, quindi $f(]-\infty, 1]) = [f(1), \lim_{x\to-\infty} f(x)[= [0, +\infty[$. Poiché $1 \in [0, +\infty[$ e f strettamente decrescente (per il test di monotonia stretta), possiamo quindi concludere che il valore 1 è assunto esattamente una volta nell'intervallo $]-\infty, 1]$.

- Con lo stesso ragionamento, osserviamo che f è continua e strettamente crescente in $[1, 2]$, così $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [0, e^{-2}]$ che non contiene il valore 1. In tale intervallo non si trovano quindi soluzioni di $f = 1$.

- Per concludere f è continua e strettamente decrescente in $[2,+\infty[$, così $f([2,+\infty[) =]\lim_{x\to\infty}, f(2)] =]0, e^{-2}]$ che non contiene il valore 1. In tale intervallo non si trovano quindi soluzioni di $f = 1$.

In definitiva $f = 1$ ha una sola soluzione, che si trova nell'intervallo $]-\infty, 1[$.

(4) [3,5 pti] Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^e \frac{4\log(x)+5}{(3\log^2(x)+1)(\log(x)+3)}\frac{dx}{x}.$$

Applichiamo il cambio di variabile $\log(x)=t$. Gli estremi diventano $t=\log(0)=1$ e $t=\log(e)=1$, e $dt=\dfrac{dx}{x}$. Dobbiamo quindi calcolare $\int_0^1 \frac{4t+5}{(3t^2+1)(t+3)}\,dt$. Usiamo il metodo di fratti semplici per calcolare A, B e C tali che $\dfrac{At+B}{3t^2+1}+\dfrac{C}{t+3}=\dfrac{4t+5}{(3t^2+1)(t+3)}$. Dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} A+3C=0 \\ 3A+B=4 \\ 3B+C=5 \end{cases}$ da cui si ricava $A=\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{7}{4}$ e $C=-\dfrac{1}{4}$. Procediamo con il calcolo dell'integrale:

$$\int_0^1 \frac{4t+5}{(3t^2+1)(t+3)}\,dt=\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{3t}{3t^2+1}\,dt+7\int_0^1\frac{1}{3t^2+1}\,dt-\int_0^1\frac{1}{t+3}\,dt\right)=$$

Applichiamo nell'integrale al centro il cambio di variabile $s=\sqrt{3}t$, da cui $ds=\dfrac{dt}{\sqrt{3}}$ e gli estremi diventano 0 e $\sqrt{3}$.

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left[\log(3t^2+1)\right]_{t=0}^{t=1}+\frac{7}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{s^2+1}\,ds-\left[\log(t+3)\right]_{t=0}^{t=1}\right)=\frac{1}{8}\log(4)+\frac{7}{4\sqrt{3}}\left[\arctan s\right]_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\log\left(\frac{4}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\log(4)+\frac{7\pi}{12\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\log\left(\frac{4}{3}\right).$$

(5) [2,5 pti] Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+\log(3n+1)}{\sqrt{n^3+2}+e^{3n}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\log(3n+1)}{\sqrt{n^3+2}+e^{3n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+o(n^2)}{e^{3n}+o(e^{3n})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^{3n}}=0$$

(6) [6 pti] Eventualmente usando gli sviluppi

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3!}+o(y^3),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\quad \arctan(y)=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+o(y^5),$$

$$(1+y)^\alpha=1+\alpha y+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}y^3+o(y^3)$$

calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x\arctan x)+1-e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}.$$

Sviluppiamo il denominatore:

$$\sqrt{1+2x^4}-1=1+\frac{1}{2}(2x^4)+o(x^4)-1=x^4+o(x^4)$$

Calcoliamo uno sviluppo della funzione al numeratore.

$$\log(1+x\arctan x)=x\arctan x-\frac{x^2\arctan^2 x}{2}+o((x\arctan x)^2)=$$

$$=x\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{x^2}{2}(x+o(x))^2+o(x^4)=x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^2-\frac{5x^4}{6}+o(x^4)$$

Inoltre
$$1 - e^{x^2} = 1 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
Così
$$\log(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2} = \left(-\frac{5}{6} - dfrac12\right) x^4 + o(x^4) = -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4).$$
Possiamo quindi concludere che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1} = -\frac{4}{3}.$$