Esercizi

1.

Sia
$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij}^2 u$$
dove (a_{ij}) e' definita positiva. Sappiamo che

- L ha una soluzione fondamentale Γ tale che $|\Gamma| \le |x|^{-n+2}$, $|\partial_i \Gamma| \le |x|^{-n+1}$, $|\partial_{ij}\Gamma| \le |x|^{-n}$
- $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B(0,\epsilon)} < A\nabla\Gamma(y), \nu(y) >_E d\sigma(y) = 1$$
  dove $B(x,r) = \{y : |\Gamma(x-y)|^{-1} \le r^{n-2}\}$

Dedurne che per ogni funzione di classe C^2 in un aperto Ω e per ogni sfera inclusa in Ω
$$u(x) = \int_{\partial B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma(x-y), \nu >_E u(y) d\sigma(y) - \int_{B(x,\epsilon)} < A\nabla\Gamma(x-y), \nabla u(y) >_E dy$$

2. Sia $Lu = \Delta u + b\nabla u$, dove b e' un vettore costante. Se Ω e' aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\hat{\Omega})$, e' soluzione dell'equazione $Lu = 0$, provare che u assume massimo e minimo sulla frontiera di Ω.

3. Sia $u \in C^2(R^n)$ tale che $\Delta u \ge 0$. Se
$$\lim \sup_{|y| \to +\infty} u(y) \le 0,$$
allora $\sup u \le 0$