1. Dimostrare il seguente Teorema di convergenza dominata per funzioni continue, usando l'analogo teorema di convergenza dominata per successioni.

   Teorema Siano $\Omega_1 \subset R^N$, $\Omega_2 \subset R^M$ insiemi aperti. Supponimao che $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ soddisfi le condizioni seguenti:

   1) per ogni $y \in \Omega_2$ la funzione $x \to f(x, y)$ appartiene ad $L^1(\Omega_1)$.
   2) quasi per ogni $x \in \Omega_1$ la funzione $y \to f(x, y)$ e' continua.
   3) esiste una funzione $g \in L^1(\Omega_1)$ tale che $|f(x, y)| \leq g(x)$ quasi per ogni $x \in \Omega_1$ e per ogni $y \in \Omega_2$.

   Allora la funzione
   $$F(y) = \int_{\Omega_1} f(x, y)dx$$
   e' continua in Ω_2

   esercizio svolto in classe

2. Dimostrare il seguente Teorema di convergenza dominata per limiti, usando l'analogo teorema di convergenza dominata per successioni.

   Teorema Siano $\Omega_1 \subset R^N$, aperto e $\Omega_2 \subset R^M$. Supponimao che y_0 sia di accumulazione per Ω_2 e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ soddisfi le condizioni seguenti:

   1) per ogni $y \in \Omega_2$ la funzione $x \to f(x, y)$ appartiene ad $L^1(\Omega_1)$.
   2) esiste una funzione $l \in L^1(\Omega_1)$ tale che quasi per ogni $x \in \Omega_1$ esiste $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = l(x)$
   3) esiste una funzione $g \in L^1(\Omega_1)$ tale che $|f(x, y)| \leq g(x)$ quasi per ogni $x \in \Omega_1$ e per ogni $y \in \Omega_2$.

   Allora
   $$\text{posto } F(y) = \int_{\Omega_1} f(x, y)dx \qquad \text{esiste} \qquad \lim_{y \to y_0} F(y) = \int_{\Omega_1} l(x)dx$$

   l'esercizio si risolve procedendo come nell'esercizio 1, sostituendo la definizione di funzione continua con quella di limite, e riducendosi al teorema di convergenza dominata per successioni

3. Dimostrare il seguente Teorema di convergenza dominata per derivate, usando il teorema di convergenza dominata per limiti.

   Teorema Siano $\Omega_1 \subset R^N$, $\Omega_2 \subset R^M$, aperti. Supponiamo che $y_0 \in \Omega_2$ e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ soddisfi le condizioni seguenti:

   1) per ogni $y \in \Omega_2$ la funzione $x \to f(x, y)$ appartiene ad $L^1(\Omega_1)$.
   2) quasi per ogni $x \in \Omega_1$ e per ogni $y \in \Omega_2$ esiste $\partial_y f(x, y)$
   3) esiste una funzione $g \in L^1(\Omega_1)$ tale che $|\partial_y f(x, y)| \leq g(x)$ quasi per ogni $x \in \Omega_1$ e per ogni $y \in \Omega_2$.

   Allora
   $$\text{posto } F(y) = \int_{\Omega_1} f(x, y)dx \qquad \text{esiste} \qquad \frac{dF}{dy}(y) = \int_{\Omega_1} \partial_y f(x, y_0)dx$$

   Scrivere la derivata di F come limite del rapporto incrementale e verificare che si puo' passare al limite usando l'esercizio 2

4. Dimostrare il seguente Teorema di convergenza dominata in L^p, usando il teorema di convergenza dominata per le successioni

   Teorema Siano $\Omega_1 \subset R^N$, Supponiamo una successione $f_n : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ soddisfi le condizioni seguenti:

   1) per ogni $n \in N$ la funzione $x \to f_n(x)$ appartiene ad $L^p(\Omega_1)$.
   2) esiste una funzione f definita in Ω_1 tale che quasi per ogni $x \in \Omega_1$ e esiste $\lim_n f_n(x) = f(x)$
   3) esiste una funzione $g \in L^1(\Omega_1)$ tale che $|f_n(x)|^p \leq g(x)$ quasi per ogni $x \in \Omega_1$ e per ogni $n \in N$.

Allora f appartiene ad L^p e f_n conferge a f in L^p

usare l'ippotesi 3) per provare che f sta in L^p e applicare il teorema della convergenza dominata per successioni L^1 alla successione $|f_n(x) - f(x)|^p$ per provare la seconda affermazione

5. Provare che se f_n tende a f in L^p allora $||f_n||_p$ tende a $||f||$ in L^p.

6. Sia
$$F : R \to R, \quad F(t) = \frac{t^{p+2}}{t^2 + 1}.$$
Provare che se f_n tende a f in L^p allora $\int F(f_n(x))dx$ tende a $\int F(f(x))dx$.

7. Sia
$$F : R \to R, \quad F(t) = \frac{|t|^p log(|t| + 1)}{log(|t| + 6)}.$$
Provare che se f_n tende a f in L^p allora $\int F(f_n(x))dx$ tende a $\int F(f(x))dx$.

8. Sia
$$F : R \to R, \quad F(t) = \frac{|t|^p log^2(t)}{log^2(t) + 1}.$$
Provare che se f_n tende a f in L^p allora $\int F(f_n(x))dx$ tende a $\int F(f(x))dx$.

9. Sia (g_n) successione in L^3, convergente a $g \in L^3$, sia (f_n) successione in $L^{3/2}$, convergente a f. Provare che
$$\int f_n g_n \to \int fg$$

10. Sia (g_n) successione convergente a $g \in L^4$, sia (f_n) successione convergente a f in L^2, sia (h_n) successione convergente a h in L^4. Provare che
$$\int f_n g_n h_n \to \int fgh$$

Per le successioni seguenti dire se esiste il limite puntuale, il $\lim_n ||f_n||$ e se esiste il limite in L^p.

11. $f_n : R \to R, \quad f_n(x) = exp(-(x - n^2))$
12. $f_n : R \to R, \quad f_n(x) = exp(-(x - 3 + 1/n))$
13. $f_n : R^N \to R, \quad f_n(x) = \frac{exp(-(|x|^2/n))}{n^{N/2}}$
14. $f_n : R^N \to R, \quad f_n(x) = \frac{exp(-(|x|^2))}{n^{(N-1)/2}}$
15. $f_n : [0, 1] \to R, \quad f_n(x) = x^n$
16. $f_n : [0, 1] \to R, \quad f_n(x) = \sqrt{n}x^n$
17. $f_n : [0, 1] \to R, \quad f_n(x) = nx^n$