Per le successioni seguenti dire se convergono debolmente in L^p.

1. $f_n : R \to R, \quad f_n(x) = exp(-(x-n)^2)$
2. $f_n : R \to R, \quad f_n(x) = exp(-(x-3+1/n)^2)$
3. $f_n : R^N \to R, \quad f_n(x) = n^{N/2} exp(-(n|x|^2))$
4. $f_n : R^N \to R, \quad f_n(x) = \frac{exp(-|x|^2)}{n^{(N-1)/2}}$
5. $f_n : [0,1] \to R, \quad f_n(x) = x^n$
6. $f_n : [0,1] \to R, \quad f_n(x) = \sqrt{n} x^n$
7. $f_n : [0,1] \to R, \quad f_n(x) = n x^n$

8. Se f_n e' una successione limitata in $L^p(R^N)$ tale che per ogni funzione $g \in C_0^\infty(R^N)$

$$\int f_n g \to \int f g$$

allora f_n tende a f debolmente $\sigma(L^p, L^{p'})$

8. Se f_n e' una successione limitata in $L^p(R^N)$ tale che per ogni sottinsieme E misurabile e limitato di R^N

$$\int_E f_n \to \int_E f$$

allora f_n tende a f debolmente $\sigma(L^p, L^{p'})$

Sia $g \in L^{p'}$,

$$A : L^p(R^N) \to R \quad A(f) = \int |f(x)|^p - \int f(x)g(x)$$

Provare che

- $A(f) \to +\infty$ per $f \to +\infty$
- $inf A \in R$
- A ha minimo

10. Sia $g \in L^{p'}$,

$$A : L^p(R^N) \to R \quad A(f) = \int |f(x)|^p$$

Provare che A ha ninimo sull'insieme

$$\{f : \int g(x)f(x) = 1\}$$

11. Sia $g \in L^{p'}$,

$$A : L^p(R^N) \to R \quad A(f) = \int f(x)g(x)$$

Provare che A ha ninimo sull'insieme

$$\{f : \int |f(x)|^p \leq 1\}$$

12. Sia Ω aperto limitato $g \in L^{q'}(\Omega)$, $1 < p < q$,

$$A : L^q(\Omega) \to R \quad A(f) = \int |f(x)|^p dx + \int |f(x)|^q dx$$

Provare che A ha ninimo sull'insieme

$$\{f : \int f(x)g(x) = 1\}$$

13. Sia Ω aperto limitato $1 < p < q$,

$$A : L^q(\Omega) \to R \quad A(f) = \int |f(x)|^p dx$$

Provare che A ha ninimo sull'insieme

$$\{f : \int |f(x)|^q \leq 1\}$$

14. Sia Ω aperto limitato $g \in L^{q'}(\Omega)$, $1 < p < q$,

$$A : L^q(\Omega) \to R \quad A(f) = \int |f(x)|^p dx$$

Provare che A ha ninimo sull'insieme

$$\{f : \int |f(x)|^q + \int f(x)g(x) \leq 1\}$$