1. Provare che lo spazio $C^1([0,1], R)$ con la norma

$$||f|| = ||f||_\infty$$

e' normato, ma non e' completo

2. Provare che lo spazio $C^1([0,1], R)$ con la norma

$$||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

e' normato e completo

3. Sia $X$ di Banach. Sia $f \in X^*$ Abbiamo definito

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |< f, x >|$$

Provare che

$$||f|| = \sup_{||x|| = 1} |< f, x >|$$

4. Sia $X$ di Banach. Sia $x \in X$ Provare che esiste $f \in X^*$ tale che

$$||f|| = ||x||, \quad < f, x >= ||x||^2$$

5. Sia $X$ di Banach. Sia $x \in X$ Siano

$$F(x) = \{f \in X^* : ||f|| = ||x||, \quad < f, x >= ||x||^2\}$$

$$F'(x) = \{f \in X^* : ||f|| \leq ||x||, \quad < f, x >= ||x||^2\}$$

Provare che

- $F(x) = F'(x)$
- $F(x)$ e' non vuoto chiuso convesso.

6. Uno spazio di Banach $X$ si dice strettamente convesso se per ogni $x, y \in X$ $|x| = |y| = 1$ implica che per ogni $t \in ]0, 1[$

$$|tx + (1-t)y| < 1.$$

- Dire se $R^2$ con la norma euclidea e' strettamente convesso
- Indicati $x = (x_1, x_2)$ i punti di $R^2$, dire se $R^2$ con la norma $|x| = max(x_1, x_2)$ e' strettamente convesso.

7. Se $X^*$ e' strettamente convesso, allora per ogni $x$ l'insieme

$$F(x) = \{f \in X^* : ||f|| = ||x||, \quad < f, x >= ||x||^2\}$$

ha un solo elemento

8. Se $X^*$ e' strettamente convesso, allora per ogni $x \in X$ indichiamo

$$F(x) = \{f \in X^* : ||f|| = ||x||, \quad < f, x >= ||x||^2\}$$

$$F''(x) = \{f \in X^* : \frac{||y||^2}{2} - \frac{||x||^2}{2} \geq < f, y - x >, \quad \forall y \in X\}$$

Provare che $F = F''$

9. Siano $E$, $F$ spazi di Banach, e sia $(T_n)$ successione in $\mathcal{L}(E, F)$.

- Supponiamo che per ogni $x \in E$ la successione $(T_n(x))$ converge a $T(x)$

provare che se $x_n \to \bar{x}$, allora $(T_n(x_n))$ converge a $T(\bar{x})$