1. Provare che lo spazio $C^0([0,1],R)$ con la norma

$$||f|| = ||f||_\infty$$

e' normato, e completo

2. Provare che lo spazio $C^1([0,1],R)$ con la norma

$$||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

e' normato e completo

3. Provare che lo spazio $C^1([0,1],R)$ con la norma

$$||f|| = ||f||_\infty$$

e' normato, ma non completo

4. Provare che

$$||f|| = ||f'||_\infty$$

non e' una norma per lo spazio $C^1([0,1],R)$

5. Provare che lo spazio $C^1_0([0,1],R) = \{f \in C^1([0,1],R) : f(0) = f(1) = 0\}$ con la norma

$$||f|| = ||f'||_\infty$$

e' normato completo

6. Provare che lo spazio $C^1_0([0,1],R) = \{f \in C^1([0,1],R) : f(0) = f(1) = 0\}$ con la norma

$$||f|| = ||f'||_\infty$$

e' normato completo

7. Provare che lo spazio $C^1_0([0,1],R) = \{f \in C^1([0,1],R) : f(0) = f(1) = 0\}$ con la norma

$$||f|| = ||f'||_\infty$$

e' normato completo

8. Sia $\alpha \in]0,1[$. Diciamo che una funzione $f \in C^0([0,1],R)$ Ã¨ holderiana di esponente α se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

per ogni x, y. Indichiamo $C^\alpha([0,1],R)$ l'insieme delle funzioni holderiane definite su $[0,1]$. Poniamo

$$[f]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

- Provare che $[f]_\alpha$ e' una seminorma per $C^\alpha([0,1],R)$
- Provare che $C^\alpha([0,1],R)$ e' normato e completo rispetto alla norma $||f||_\infty + [f]_\alpha$