Corollario 0.1. *Sia E uno spazio di Banach. Sia F un sottospazio chiuso, tale che $F \neq E$. Proviamo che esiste $h : E^*$ tale che $h(x) = 0$ per ogni $x \in F$ e $h \neq 0$.*

Se $F \neq E$ allora esiste ξ tale che $\xi \in E - F$. Chiamiamo V e' sottospazio di E generato da F e ξ.

$$V = \{x + \lambda\xi : x \in F, \lambda \in R\}.$$

e definiamo

$$h : V \to R \qquad h(x + \lambda\xi) = \lambda$$

h e' lineare. Verifichiamo che e' limitata su V. Questo e' equivalente a richiedere che sia continua in 0. Si tratta quindi di provare che per ogni successione $(x_n + \lambda_n\xi)$ tale che $x_n + \lambda_n\xi \to 0$ si ha

$$h(x_n + \lambda_n\xi) = \lambda_n \to 0$$

Se per assurdo λ_n non tende a 0, allora esiste ϵ tale che $|\lambda_n| > \epsilon$ per ogni n. Allora $(1/|\lambda_n|)$ e' limitata e da $x_n + \lambda_n\xi \to 0$ possiamo dedurre

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| ||x_n + \lambda_n\xi|| = ||x_n/\lambda_n + \xi|| \to 0$$

Quindi $\xi = -lim_n \frac{x_n}{\lambda_n}$ Poiche' $\frac{x_n}{\lambda_n} \in F$ per ogni n e F e' chiuso, allora $\xi \in F$, contro l'ipotesi. Quindi necessariamente $\lambda_n \to 0$ e h e' continua in 0. Ne viene che h e' lineare e limitata su F e si puo' estendere su tutto E ad un funzionale lineare limitato che chiameremo ancpra h, e che ha medesima norma di h.