Siano $p \in C^1([0,1],R)$ $p \geq 1$, $q \in C^1([0,1],R)$ $q \geq 0$. Per ogni $f \in C([0,1],R)$ si consideri il problema al bordo:

$$-(pu')' + qu = f \qquad u(0) = u(1) = 0$$

1. Sia $u \in C([0,1],R) \cap C^2(]0,1[,R)$ tale che $u(0) = u(1) = 0$. Provare che u e' soluzione se e solo se per ogni $\phi \in C_0^\infty(]0,1[,R)$
$$\int pu'\phi' + \int qu\phi = \int f\phi$$

2. Usando il punto 1. provare che se u e' soluzione, allora
$$\int p(u')^2 + \int qu^2 = \int fu$$

3. Usando il punto 2. provare che se u e' soluzione, e $f = 0$, allora $u = 0$

4. costruire una soluzione come somma dell'integrale generale dell'omogenea associata, piu una soluzione della non omogenea

5. costruire una soluzione debole utilizzando il teorema di Rietz

Si chiama operatore di risoluzione

$$T : C([0,1],R) \to C([0,1],R) \quad T(f) = u$$

6. l'operatore di risoluzione e' lineare.

7. l'operatore di risoluzione
$$T : L^2([0,1],R) \to W_0^1([0,1],R)$$
e' limitato

8. l'operatore di risoluzione
$$T : L^2([0,1],R) \to L^2([0,1],R)$$
e' compatto

9. costruire una soluzione debole come minimo del funzionale
$$\frac{1}{2}\int p(u')^2 + \frac{1}{2}\int qu^2 = \int fu$$