PROVA SCRITTA

1. Siano $f \in L^2(R)$, derivabile in senso debole con $f' \in L^2$. Sia $\chi \in C_0^\infty$ a supporto compatto, e sia $\chi_\epsilon(s) = \frac{1}{\epsilon}\chi\left(\frac{s}{\epsilon}\right)$. Sia

   $$f_\epsilon = \chi_\epsilon * f$$

   Provare che

   $$f'_\epsilon \to f'$$

   in L^2

2. Siano $E = C^1([0,1], R)$ con la norma $||f||_\infty$ e $F = C([0,1], R)$ con la stessa norma Verificare che l'operatore

   $$A : E \to F, \qquad A(f) = 2f'$$

   A e' lineare ma non limitato

3. Sia $T : W_0^1(]0,1[, R) \to R$

   $$T(u) = \int_0^1 |u'|^2 + \int_0^1 e^u - \int_0^1 u^5 dx$$

   - Provare che T ha minimo.
   - Imponendo l'annullamento del differenziale di Gateau nel punto di minimo, determinare l'equazione soddisfatta da u.
   - Verificare che l'equazione e' soddisfatta in senso classico.